THESE

présentée à

l'université scientifique et médicale de grenoble

pour obtenir

le grade de docteur ès-sciences

par

Claude Carasso

~

l'algorithme d'échange en optimisation convexe

~

Thèse soutenue le 5 octobre 1973 devant la commission d'examen

Président: N. Gastinel

Examinateurs: J.P. Aubin

B. Broscowski

R.T. Rockafellar

P.J. Laurent

THESE

présentée à

l'université scientifique et médicale de grenoble

pour obtenir

le grade de docteur ès-sciences

par

Claude Carasso

—

l'algorithme d'échange en optimisation convexe

—

Thèse soutenue le 5 octobre 1973 devant la commission d'examen

Président: N. Gastinel

Examinateurs: J.P. Aubin

B. Broscwski

R.T. Rockafellar

P.J. Laurent

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

UNIVERSITE SCIENTIFIQUE
ET MEDICALE DE GRENOBLE

LISTE DES PROFESSEURS

Président : Monsieur Michel SOUTIF
Vice-Président : Monsieur Gabriel CAU

PROFESSEURS TITULAIRES

MM.	ANGLES D'AURIAC Paul	Mécanique des fluides
	ARNAUD Georges	Clinique des maladies infectieuses
	ARNAUD Paul	Chimie
	AUBERT Guy	Physique
	AYANT Yves	Physique approfondie
Mme	BARBIER Marie-Jeanne	Electrochimie
MM.	BARBIER Jean-Claude	Physique expérimentale
	BARBIER Reynold	Géologie appliquée
	BARJON Robert	Physique nucléaire
	BARNOUD Fernand	Biosynthèse de la cellulose
	BARRA Jean-René	Statistiques
	BARRIE Joseph	Clinique chirurgicale
	BENOIT Jean	Radioélectricité
	BERNARD Alain	Mathématiques Pures
	BESSON Jean	Electrochimie
	BEZES Henri	Chirurgie générale
	BLAMBERT Maurice	Mathématiques Pures
	BOLLIET Louis	Informatique (IUT B)
	BONNET Georges	Electrotechnique
	BONNET Jean-Louis	Clinique ophtalmologique
	BONNET-EYMARD Joseph	Pathologie médicale
	BONNIER Etienne	Electrochimie Electrométallurgie
	BOUCHERLE André	Chimie et Toxicologie
	BOUCHEZ Robert	Physique nucléaire
	BOUSSARD Jean-Claude	Mathématiques Appliquées
	BRAVARD Yves	Géographie
	BRISSONNEAU Pierre	Physique du solide
	BUYLE-BODIN Maurice	Electronique
	CABANAC Jean	Pathologie chirurgicale
	CABANEL Jean	Clinique rhumatologique et hydrologie
	CALAS François	Anatomie
	CARRAZ Gilbert	Biologie animale et pharmacodynamie
	CAU Gabriel	Médecine légale et Toxicologie
	CAUQUIS Georges	Chimie organique
	CHABAUTY Claude	Mathématiques Pures
	CHARACHON Robert	Oto-Rhino-Laryngologie
	CHATEAU Robert	Thérapeutique
	CHENE Marcel	Chimie papetière
	COEUR André	Pharmacie chimique
	CONTAMIN Robert	Clinique gynécologique
	COUDERC Pierre	Anatomie Pathologique
	CRAYA Antoine	Mécanique

Mme	DEBELMAS Anne-Marie	Matière médicale
MM.	DEBELMAS Jacques	Géologie générale
	DEGRANGE Charles	Zoologie
	DESRE Pierre	Métallurgie
	DESSAUX Georges	Physiologie animale
	DODU Jacques	Mécanique appliquée
	DOLIQUE Jean-Michel	Physique des plasmas
	DREYFUS Bernard	Thermodynamique
	DUCROS Pierre	Cristallographie
	DUGOIS Pierre	Clinique de Dermatologie et Syphiligraphie
	FAU René	Clinique neuro-psychiatrique
	FELICI Noël	Electrostatique
	GAGNAIRE Didier	Chimie physique
	GALLISSOT François	Mathématiques Pures
	GALVANI Octave	Mathématiques Pures
	GASTINEL Noël	Analyse numérique
	GEINDRE Michel	Electroradiologie
	GERBER Robert	Mathématiques Pures
	GIRAUD Pierre	Géologie
	KLEIN Joseph	Mathématiques Pures
Mme	KOFLER Lucie	Botanique et Physilogie végétale
MM.	KOSZUL Jean-Louis	Mathématiques Pures
	KRAVTCHENKO Julien	Mécanique
	KUNTZMANN Jean	Mathématiques appliquées
	LACAZE Albert	Thermodynamique
	LACHARME Jean	Biologie végétale
	LAJZEROWICZ Joseph	Physique
	LATREILLE René	Chirurgie générale
	LATURAZE Jean	Biochimie pharmaceutique
	LAURENT Pierre-Jean	Mathématiques appliquées
	LEDRU Jean	Clinique médicale B
	LLIBOUTRY Louis	Géophysique
	LOUP Jean	Géographie
Mle	LUTZ Elisabeth	Mathématiques Pures
MM.	MALGRANGE Bernard	Mathématiques Pures
	MALINAS Yves	Clinique obstétricale
	MARTIN-NOEL Pierre	Seméiologie médicale
	MASSEPORT Jean	Géographie
	MAZARE Yves	Clinique médicale A
	MICHEL Robert	Minéralogie et Pétrographie
	MOURIQUAND Claude	Histologie
	MOUSSA André	Chimie nucléaire
	NEEL Louis	Physique du solide
	OZENDA Paul	Botanique
	PAUTHENET René	Electrotechnique
	PAYAN Jean-Jacques	Mathématiques Pures
	PEBAY-PEYROULA Jean-Claude	Physique
	PERRET René	Servomécanismes
	PILLET Emile	Physique industrielle
	RASSAT André	Chimie systématique
	RENARD Michel	Thermodynamique
	REULOS René	Physique industrielle
	RINALDI Renaud	Physique
	ROGET Jean	Clinique de pédiatrie et de puériculture
	SANTON Lucien	Mécanique
	SEIGNEURIN Raymond	Microbiologie et Hygiène
	SENGEL Philippe	Zoologie
	SILBERT Robert	Mécanique des fluides
	SOUTIF Michel	Physique générale

MM.	TANCHE Maurice	Physiologie
	TRAYNARD Philippe	Chimie générale
	VAILLAND François	Zoologie
	VALENTIN Jacques	Physique nucléaire
	VAUQUOIS Bernard	Calcul électronique
Mme	VERAIN Alice	Pharmacie galénique
M.	VERAIN André	Physique
Mme	VEYRET Germaine	Géographie
MM.	VEYRET Paul	Géographie
	VIGNAIS Pierre	Biochimie médicale
	YOCCOZ Jean	Physique nucléaire théorique

PROFESSEURS ASSOCIES

MM.	BULLEMER Bernhard	Physique
	HANO JUN-ICHI	Mathématiques Pures
	STEPHENS Michaël	Mathématiques appliquées

PROFESSEURS SANS CHAIRE

MM.	BEAUDOING André	Pédiatrie
Mme	BERTRANDIAS Françoise	Mathématiques Pures
MM.	BERTRANDIAS Jean-Paul	Mathématiques appliquées
	BIAREZ Jean-Pierre	Mécanique
	BONNETAIN Lucien	Chimie minérale
Mme	BONNIER Jane	Chimie générale
MM.	CARLIER Georges	Biologie végétale
	COHEN Joseph	Electrotechnique
	COUMES André	Radioélectricité
	DEPASSEL Roger	Mécanique des fluides
	DEPORTES Charles	Chimie minérale
	GAUTHIER Yves	Sciences biologiques
	GAVEND Michel	Pharmacologie
	GERMAIN Jean-Pierre	Mécanique
	GIDON Paul	Géologie et Minéralogie
	GLENAT René	Chimie organique
	HACQUES Gérard	Calcul numérique
	JANIN Bernard	Géographie
Mme	KAHANE Josette	Physique
MM.	MULLER Jean-Michel	Thérapeutique
	PERRIAUX Jean-Jacques	Géologie et Minéralogie
	POULOUJADOFF Michel	Electrotechnique
	REBECQ Jacques	Biologie (CUS)
	REVOL Michel	Urologie
	REYMOND Jean-Charles	Chirurgie générale
	ROBERT André	Chimie papetière
	DE ROUGEMONT Jacques	Neurochirurgie
	SARRAZIN Roger	Anatomie et chirurgie
	SARROT-REYNAULD Jean	Géologie
	SIBILLE Robert	Construction mécanique
	SIROT Louis	Chirurgie générale
Mme	SOUTIF Jeanne	Physique générale

MAITRES DE CONFERENCES ET MAITRES DE CONFERENCES AGREGES

Mle	AGNIUS-DELORD Claudine	Physique pharmaceutique
	ALARY Josette	Chimie analytique
MM.	AMBLARD Pierre	Dermatologie
	AMBROISE-THOMAS Pierre	Parasitologie
	ARMAND Yves	Chimie
	BEGUIN Claude	Chimie organique
	BELORIZKY Elie	Physique
	BENZAKEN Claude	Mathématiques appliquées
	BILLET Jean	Géographie
	BLIMAN Samuel	Electronique (EIE)
	BLOCH Daniel	Electrotechnique
Mme	BOUCHE Liane	Mathématiques (CUS)
MM.	BOUCHET Yves	Anatomie
	BOUVARD Maurice	Mécanique des fluides
	BRODEAU François	Mathématiques (IUT B)
	BRUGEL Lucien	Energétique
	BUISSON Roger	Physique
	BUTEL Jean	Orthopédie
	CHAMBAZ Edmond	Biochimie médicale
	CHAMPETIER Jean	Anatomie et organogénèse
	CHIAVERINA Jean	Biologie appliquée (EFP)
	CHIBON Pierre	Biologie animale
	COHEN-ADDAD Jean-Pierre	Spectrométrie physique
	COLOMB Maurice	Biochimie médicale
	CONTE René	Physique
	COULOMB Max	Radiologie
	CROUZET Guy	Radiologie
	DURAND Francis	Métallurgie
	DUSSAUD René	Mathématiques (CUS)
Mme	ETERRADOSSI Jacqueline	Physiologie
MM.	FAURE Jacques	Médecine légale
	GENSAC Pierre	Botanique
	GIDON Maurice	Géologie
	GRIFFITHS Michaël	Mathématiques appliquées
	GROULADE Joseph	Biochimie médicale
	HOLLARD Daniel	Hématologie
	HUGONOT Robert	Hygiène et Médecine préventive
	IDELMAN Simon	Physiologie animale
	IVANES Marcel	Electricité
	JALBERT Pierre	Histologie
	JOLY Jean-René	Mathématiques Pures
	JOUBERT Jean-Claude	Physique du solide
	JULLIEN Pierre	Mathématiques Pures
	KAHANE André	Physique générale
	KUHN Gérard	Physique
	LACOUME Jean-Louis	Physique
Mme	LAJZEROWICZ Jeannine	Physique
MM.	LANCIA Roland	Physique atomique
	LE JUNTER Noël	Electronique
	LEROY Philippe	Mathématiques
	LOISEAUX Jean-Marie	Physique nucléaire
	LONGEQUEUE Jean-Pierre	Physique nucléaire
	LUU DUC Cuong	Chimie organique
	MACHE Régis	Physiologie végétale
	MAGNIN Robert	Hygiène et Médecine préventive
	MARECHAL Jean	Mécanique
	MARTIN-BOUYER Michel	Chimie (CUS)

MM.	MAYNARD Roger	Physique du solide
	MICHOULIER Jean	Physique (IUT A)
	MICOUD Max	Maladies infectieuses
	MOREAU René	Hydraulique (INP)
	NEGRE Robert	Mécanique
	PARAMELLE Bernard	Pneumologie
	PECCOUD François	Analyse (IUT B)
	PEFFEN René	Métallurgie
	PELMONT Jean	Physiologie animale
	PERRET Jean	Neurologie
	PERRIN Louis	Pathologie expérimentale
	PFISTER Jean-Claude	Physique du solide
	PHELIP Xavier	Rhumatologie
Mlle	RIERY Yvette	Biologie animale
MM.	RACHAIL Michel	Médecine interne
	RACINET Claude	Gynécologie et obstétrique
	RENAUD Maurice	Chimie
	RICHARD Lucien	Botanique
Mme	RINAUDO Marquerite	Chimie macromoléculaire
MM.	ROMIER Guy	Mathématiques (IUT B)
	SHOM Jean-Claude	Chimie générale
	STIEGLITZ Paul	Anesthésiologie
	STOEBNER Pierre	Anatomie pathologique
	VAN CUTSEM Bernard	Mathématiques appliquées
	VEILLON Gérard	Mathématiques appliquées (INP)
	VIALON Pierre	Géologie
	VOOG Robert	Médecine interne
	VROUSSOS Constantin	Radiologie
	ZADWORNY François	Electronique

MAITRES DE CONFERENCES ASSOCIES

MM.	BOUDOURIS Georges	Radioélectricité
	CHEEKE John	Thermodynamique
	GOLDSCHMIDT Hubert	Mathématiques
	SIDNEY STUARD	Mathématiques Pures
	YACOUD Mahmoud	Médecine légale

CHARGES DE FONCTIONS DE MAITRES DE CONFERENCES

Mme	BERIEL Hélène	Physilogie
Mme	RENAUDET Jacqueline	Microbiologie

Fait le 30 mai 1972.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41534920_0011

A Mireille

Je tiens a exprimer mes plus vifs remerciements à Monsieur LAURENT, Professeur à l'Université Scientifique et Médicale de Grenoble, pour l'aide et les encouragements qu'il m'a prodigués depuis mon arrivée au Laboratoire de Mathématiques Appliquées de Grenoble.

Que Monsieur GASTINEL, Professeur à l'Université Scientifique et Médicale de Grenoble, qui a su, par son dynamisme et son ouverture d'esprit, créer une véritable "équipe" d'Analyse Numérique à Grenoble trouve ici l'expression de mon admiration. Je le remercie de m'avoir fait l'honneur de présider le Jury.

Je remercie très vivement Messieurs AUBIN, Professeur à l'Université de Parix IX Dauphine, BROSOWSKI, Professeur à l'Université de Göttingen et ROCKAFELLAR, Professeur à l'Université de Washington (Seattle), qui ont accepté de faire partie du Jury.

J'adresse mes sincères remerciements à Monsieur LOBRY, Maître de Conférences à l'Université 1 de Bordeaux, qui a su en maintes occasions me communiquer son optimisme.

Une partie de ce travail a été préparé au département d'Informatique de l'Université de Montréal (Canada) ; je remercie son Directeur Monsieur ROBERT et tout le personnel enseignant pour l'ambiance amicale qu'ils ont su créer lors de mon séjour.

Je remercie chaleureusement Mademoiselle PAYERNE pour le soin et la patience qu'elle a eu pour la réalisation matérielle de ce travail.

Je remercie également le Service Reproduction et plus particulièrement Messieurs IGLESIAS, ANGUILLE, DEL GUIST.

C. CARASSO

TABLE DES MATIERES

- 1 - Etude par dualité de la minimisation d'une fonctionnelle linéaire sur une intersection de demi espaces dans une variété affine.

- 2 - Algorithme d'échange itératif pour la minimisation d'une fonctionnelle linéaire sur une intersection de demi espaces dans le translaté d'un sous espace vectoriel.

2.1. Minimisation d'une fonctionnelle linéaire dans un convexe de $\mathbb{R}^n$.

2.2. Minimisation d'une fonctionnelle linéaire dans un convexe du translaté d'un sous espace vectoriel.

2.3. Minimisation d'une fonction convexe.

2.4. Convergence de l'algorithme d'échange lorsqu'il est itératif.

3 - Programmation et applications de l'algorithme d'échange dans le cas où il est itératif.

3.1. Minimisation dans $\mathbb{R}^n$ d'une fonctionnelle linéaire sur une intersection de demi espaces.

3.2. Programmation linéaire.

3.3. Minimisation sans contrainte d'une fonction convexe dérivable.

3.4. Minimisation d'une fonction convexe dérivable avec contraintes dérivables.

3.5. Minimisation d'une fonction convexe sous différentiable avec contraintes sous différentiables.

3.6. Minimisation de l'enveloppe supérieure de fonctions affines sur un polyèdre.

3.7. Minimisation d'une fonction convexe différentiable sur un convexe défini par une infinité de contraintes.

3.8. Algorithme de minimisation d'une fonctionnelle linéaire dans un convexe d'un translaté d'un sous espace vectoriel de dimension finie.

3.8.1. Pratique de l'échange.

3.8.2. Construction de valeurs de départ.

3.9. Application à la minimisation d'une fonctionnelle dans un convexe d'un translaté d'un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

3.10. Exemples.

3.10.1. Programmation linéaire avec contraintes de type égalité et de type inégalité.

3.10.2. Minimisation d'une fonction convexe de n variables dans un convexe d'un sous espace vectoriel.

- 4 - Etude géométrique de la recherche d'un meilleur approximant dans un espace vectoriel normé.

4.1. Caractérisation géométrique d'un meilleur approximant.

4.2. Structure géométrique de l'ensemble des meilleurs approximants.

4.3. Exemples de théorèmes de caractérisation.

4.3.1. Approximation dans $C(Q;B)$.

4.3.2. Approximation au sens du "max" dans $C^1(Q)$.

4.3.3. Approximation globale d'un ensemble compact.

4.3.4. Approximation particulière dans $C^1(Q)$.

4.3.5. Approximation dans un espace produit.

4.3.6. Approximation dans $L_1(Q;B)$.

4.3.7. Approximation globale dans $L_1(Q)$.

4.4. Approximation dans un convexe d'un sous espace vectoriel de dimension finie.

- 5 - Algorithme d'échange pour la construction d'un meilleur approximant dans un espace vectoriel normé.

5.1. Algorithme de Rémès généralisé.

5.2. Interprétation géométrique de l'algorithme de Rémès généralisé.

5.3. Démonstration géométrique de la convergence de l'algorithme de Rémès généralisé dans le cas itératif.

5.4. Programmation de l'algorithme de Rémès généralisé.

5.5. Algorithme de Rémès généralisé avec contraintes par inégalités.

- 6 - Algorithme d'échange généralisé.

6.1. Description de l'algorithme d'échange généralisé.

6.2. Convergence de l'algorithme.

6.3. Remarques sur la mise en oeuvre pratique de l'algorithme.

6.4. Application à l'algorithme de Rémès généralisé avec contraintes par égalités.

- 7 - Généralité de l'hypothèse d'itérativité.

7.1. Définitions et notations.

7.2. Densité des fonctions pour lesquelles l'algorithme est itératif.

INTRODUCTION

On s'intéresse dans ce travail à la résolution de problèmes d'optimisation du type :

$$(P) \qquad \alpha = \mathrm{Inf}\,[\, < x,z > \,|\, c(s) \leq < x,a(s) > \ , \ \forall s \in S \ ; \ x \in V_t]$$

où x est un élément d'un espace vectoriel topologique localement convexe X en dualité avec X', z est un élément fixé de E', S un compact quelconque, c une application continue de S dans $\mathbb{R}$, a une application continue de S dans X', enfin V_t est une variété affine de X.

Le problème (P) recouvre de nombreux problèmes d'optimisation convexes ; il peut s'interpréter comme la minimisation d'une fonctionnelle linéaire sur une intersection de demi espaces dans une variété affine.

En utilisant systématiquement la théorie générale de la dualité basée sur les perturbations du problèmes (P) (théorie développée par R.T. ROCKAFELLAR [56], J.L. JOLY et P.J. LAURENT [37]) on forme (chapitre 1) un problème dual du problème (P) ne faisant intervenir que des mesures **positives** . On donne quelques hypothèses assurant l'existence de solutions pour le problème (P) et pour son dual. On étudie, en le mettant sous la forme du problème (P), le cas de la minimisation d'une fonction convexe sur un convexe.

Lorsque V_t est une variété affine de dimension finie, les mesures intervenant dans la résolution du problème dual de (P) ont un support de cardinal borné ; on peut alors exprimer le problème dual sous une forme géométrique. On montre comment différents problèmes de minimisation peuvent

.../...

s'exprimer sous la forme du problème (P). On développe dans le chapitre 2 un algorithme, appelé "algorithme d'échange" ; cet algorithme permet d'atteindre la valeur α aussi près qu'on le désire au moyen d'une suite d'éléments x^k de V_t vérifiant de "mieux en mieux" l'inéquation $c(s) \leq < x, a(s) >$ pour tout s dans S. L'intérêt d'un tel algorithme est qu'il ne nécessite à chaque étape que la mémorisation d'un nombre fini (et fixe) d'éléments de S. Cet algorithme fut décrit qans un cadre différent par A.A. GOLDSTEIN [32]. Le déroulement "classique" de cet algorithme nécessite à chaque étape qu'un certain déterminant soit différent de zéro, on dit alors que l'algorithme est "itératif". Lorsque le problème (P) est un problème d'approximation d'un élément dans un sous espace vectoriel d'un espace normé, l'algorithme d'échange est alors l'algorithme de E. REMES [53] généralé par P.J. LAURENT [40]. Pour pouvoir démontrer la convergence de l'algorithme ces auteurs (ainsi que A.A. GOLDSTEIN) faisaient sur a(S) une hypothèse appelée "condition de HAAR généralisée". Cette hypothèse assurait, en même temps que l'unicité de l'optimum, le déroulement "itératif" de l'algorithme. Malheureusement cette hypothèse, très forte, est rarement vérifiée dans les cas pratiques. Nous démontrons que, moyennant une hypothèse faible : algorithme "itératif", on peut approcher un élément optimal (pas forcément unique) de (P).

Dans le chapitre 3 on indique comment l'on peut, à partir d'une procédure d'échange standard, résoudre différents problèmes d'optimisation. Les programmes et résultats numériques sont complètement décrits.

Les chapitres 4 et 5 sont consacrés aux problèmes d'approximation dans un espace normé. On procède à une étude géométrique de l'algorithme ce qui nous conduit à une autre démonstration de la convergence. On résoud également quelques questions concernant la structure des meilleurs approximants (c'est un convexe quelconque) et le nombre de points critiques lorsqu'il y a unicité.

Lorsque l'algorithme d'échange n'est pas itératif on développe dans le chapitre 6 un algorithme d'échange général dérivé d'un algorithme proposé par Töpfer. Cet algorithme est récursif par rapport à la dimension de la variété affine V_t . On démontre sa convergence et on étudie sa mise

.../...

en oeuvre pratique.

Dans le dernier chapitre on montre que l'hypothèse d'itérativité de l'algorithme peut être considérée comme raisonnable. On démontre pour cela que, pour l'approximation de Tchebycheff, l'ensemble des fonctions que l'on peut approcher au moyen d'un algorithme d'échange itératif est partout dense.

CHAPITRE 1

ETUDE PAR DUALITE DE LA MINIMISATION D'UNE FONCTIONNELLE LINEAIRE SUR UNE INTERSECTION DE DEMI ESPACES DANS UNE VARIETE AFFINE

Nous étudions dans ce chapitre le problème de la minimisation de la fonctionnelle $< x,z >$ sur l'intersection d'un convexe C de la forme $C = \{x \in X | c(s) \leq < x,a(s) >\ , \forall s \in S\}$ et d'une variété affine V_t (S est compact). On forme le problème dual en utilisant des perturbations u appartenant à l'espace vectoriel des fonctions continues sur S. La technique utilisée est celle de [37] (voir [56]). A partir du dual obtenu on donne des conditions assurant l'égalité de l'optimum du problème initial et de son dual et l'existence de solutions pour les deux problèmes. On analyse la liaison existant entre les solutions du problème dual et celles du problème initial.

Soient X et X' deux espaces vectoriels topologiques localement convexes et séparés en dualité par rapport à la forme bilinéaire $< x,x' >$, pour x dans X et x' dans X'.

Soit S un compact, c et a deux applications continues de S dans, respectivement, $\mathbb{R}$ et X'.

On pose :

$$C = \{x \in X \mid c(s) \leq < x,a(s) >\ , \forall s \in S\}$$

et on note V_t le translaté d'un sous espace vectoriel V de X.

Soit z un élément fixe de X' ; on se propose de trouver un élément $\bar{x}$ de $C \cap V_t$ tel que :

$$(P) \qquad \alpha = < \bar{x},z > = \inf_{x \in C \cap V_t} < x,z >$$

On notera (P) ce problème, appelé problème primal et A l'ensemble (éventuellement vide) des solutions de (P)

$$A = \{x \in V_t \cap C \mid < x,z > = \alpha\} .$$

Dans toute la suite on supposera que α est fini (hypothèse H0).

Pour écrire le problème dual de (P) on utilisera la technique des perturbations décrite dans [37] et [41] .

Notons C l'espace des fonctions réelles continues définies sur S muni de la topologie de la convergence uniforme :

$$\|u\| = \sup_{s \in S} |u(s)|$$

On note M le dual topologique de C ; M est l'espace des mesures de Radon sur S. On muni M de la topologie faible $\sigma(M,C)$ et on note (u,u') la valeur de la mesure u' sur la fonction u.

Soit φ la fonction convexe de $X \times C$ dans $\overline{\mathbb{R}}$ définie par :

$$\varphi(x,u) = \begin{cases} < x,z > & \text{si } c(s) - < x,a(s) > \leq u(s),\ \forall s \in S \text{ et } x \in V_t \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

On note (P_u) le problème "perturbé" suivant :

$$(P_u) \qquad h(u) = \operatorname{Inf}_{x \in X} \varphi(x,u)$$

correspondant à la perturbation u.

L'espace $X \times C$ est en dualité avec l'espace $X' \times M$ au moyen de la forme bilinéaire :

$$\ll (x,u),(x',u') \gg \; = \; < x,x' > + (u,u')$$

Notons Ψ la polaire de φ ; elle est définie par :

$$\Psi(x',u') = \operatorname{Sup} [<x,x'> + (u,u') - \varphi(x,u) \,|\, x \in X \text{ et } u \in C]$$

Notons M^+ (respectivement M^-) les mesures de Radon positives (respectivement négatives) définies par :

$$M^+ = \{u' \in M \,|\, (u,u') \geq 0 \text{ , pour tout } u \geq 0\}$$

$$M^- = - \; M^+$$

Notons v l'application qui à chaque x de X associe l'application

$$s \mapsto c(s) - < x,a(s) > \quad \text{de S dans } \mathbb{R} \text{ .}$$

On a alors :

$$C = \{x \in X \,|\, c \leq v(x)\} \quad \text{et :}$$

$$\varphi(x,u) = \begin{cases} < x,z > & \text{si } \; c-v(x) \leq u \\ + \infty & \text{sinon} \end{cases}$$

L'expression de Ψ peut alors s'écrire :

$$\Psi(x',u') = \operatorname{Sup}_{x \in V_t} [< x,x'-z > + \operatorname{Sup} ((u,u') \,|\, c-v(x) \leq u)]$$

On a :

$$\operatorname{Sup}_u \left[(u,u') \,\middle|\, c-v(x) \leq u\right] = \begin{cases} (c-v(x),u') & \text{si} \quad u' \in M^- \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

En effet, si u' n'appartient pas à M^-, il existe une fonction positive u_o de C telle que $(u_o,u') > 0$; si u est telle que $c-v(x) \leq u$ on a, pour tout $\lambda > 0$ $\quad c-v(x) \leq u + u_o$, par suite $\operatorname{Sup}_u \left[(u,u') \,\middle|\, c-v(x) \leq u\right] = +\infty$.

Si u' appartient à M^- on a :

$(u,u') \leq (c-v(x),u')$ d'où le résultat :

On a alors :

$$\Psi(x',u') = \begin{cases} \operatorname{Sup}_{x \in V_t} \left[< x,x'-z > - (v(x),u')\right] + (c,u') & \text{si } u' \in M^- \\ +\infty \quad \text{sinon} \end{cases}$$

Soit $\tilde{x}$ un élément arbitraire de V_t.

Notons w la transposée de v définie par :

$$(v(x),u') = < x,w(u') >$$

avec w(u') dans X'.

On a alors :

$$\Psi(x',u') = \begin{cases} (c,u') + <\tilde{x},x'-w(u')-z > & \text{si} \quad u' \in M^- \text{ et } x'-w(u')-z \in V^o \\ +\infty \quad \text{sinon} \end{cases}$$

Le problème dual de (P) est alors :

$$(Q) \qquad \beta = \operatorname{Inf}_{u' \in M} \Psi(0,u')$$

soit :

$$(Q) \qquad \beta = -<\tilde{x},z> + \operatorname{Inf}\left[(c-v(\tilde{x}),u') \,\middle|\, u' \in M^- \text{ et } -w(u') \in V^o + z\right]$$

Le problème dual perturbé correspondant à la perturbation x' s'écrit :

$$(Q_{x'}) \qquad k(x') = \operatorname{Inf}_{u' \in M} \Psi(x',u')$$

Le problème (Q) peut aussi s'écrire si l'on pose :

$-\beta = \tilde{\beta}$ et $-u' = \tilde{u}'$:

$$\tilde{\beta} = \langle \tilde{x}, z \rangle + \operatorname{Sup} [(c - v(\tilde{x}), \tilde{u}') \,|\, \tilde{u}' \in M^+ \text{ et } w(\tilde{u}') \in V^\circ + z]$$

ou

$$(\tilde{Q}) \qquad \tilde{\beta} = \langle \tilde{x}, z \rangle + \operatorname{Sup} [r - \langle \tilde{x}, \ell \rangle \,|\, (r,\ell) \in J \cap \mathbb{R} \times (V^\circ + z)]$$

avec

$$J = \{((c,u'), w(u')) \,|\, u' \in M^+\}$$

On note B l'ensemble des solutions de $\tilde{Q}$:

$$B = \{(r,\ell) \in J \cap \mathbb{R} \times (V^\circ + z) \,|\, \tilde{\beta} = \langle \tilde{x}, z - \ell \rangle + r\}$$

On sait que l'on a toujour ([41]) :

$$\tilde{\beta} = -\beta \leq \alpha$$

On note (H1) l'hypothèse :

H1 Il existe x^* dans V_t tel que $c(s) < < x^*, a(s) > \forall s \in S$.

On a alors :

PROPOSITION 1.1 :

Si H1 est vérifié alors on a $\tilde{\beta} = \alpha$ et le problème $\tilde{Q}$ (ou le problème (Q)) a au moins une solution.

DEMONSTRATION :

Montrons que la fonctionnelle $u \mapsto \varphi(x^*,u)$ est continue en 0. La compacité de S et la continuité de c et a assurent l'existence d'un scalaire $\varepsilon > 0$ tel que :

$$\max_{s \in S} (c(s) - \langle x^*, a(s) \rangle) = -\varepsilon$$

Pour tout u de C appartenant au voisinage de zéro :

$$U = \{u \in C \mid \|u\| < \varepsilon\}$$

On a :

$$c(s) - \langle x^*, a(s) \rangle \geq u(s) \quad \text{pour tout } s \text{ dans } S.$$

Donc :

$$\varphi(x^*,u) = \langle x^*, z \rangle \text{ pour tout } u \text{ dans } U.$$

La fonctionnelle $u \mapsto \varphi(x^*,u)$ est donc continue en 0. On applique alors le théorème (7.6.1) de [41]. Le problème (P) est "stable" et ainsi on a $\tilde{\beta} = \alpha$ et le problème $(\tilde{Q})$ (ou le problème (Q)) a au moins une solution.

Q.E.D.

PROPOSITION 1.2 :

Si (H1) est vérifiée, une condition nécessaire et suffisante pour que $\bar{x}$ appartenant à $C \cap V_t$ soit solution de (P) est qu'il n'existe pas d'élément x dans V tel que $\langle x, a(s) \rangle > 0$ pour tout s dans $F(\bar{x})$ et $\langle x, z \rangle < 0$, où $F(\bar{x}) = \{s \in S \mid c(s) = \langle \bar{x}, a(s) \rangle\}$.

DEMONSTRATION :

On utilise la technique des déplacements admissibles (voir [41] chapitre I).

Notons $C_o = \{x \in X | < x,z > < < \bar{x},z >\}$

Le cône des déplacements intérieurs $\Gamma(C_o;\bar{x})$ de $\bar{x}$ vers C_o a l'expression suivante :

$$\Gamma(C_o,\bar{x}) = \{x \in X | < x,z > < 0\}$$

Le cône des déplacements intérieurs de $\bar{x}$ vers C s'écrit :

$$\Gamma(C;\bar{x}) = \{x \in X | < x,a(s) > > 0 \ , \ \forall s \in F(\bar{x})\}$$

avec :

$$F(\bar{x}) = \{s \in S | \ c(s) = < \bar{x},a(s) >\}$$ (voir [41] théorème 1.8.8).

Enfin le cône des déplacements adhérents $\Gamma^*(V_t;\bar{x})$ relatif à V_t est égal à V.

L'hypothèse (H1) signifie que $\overset{\circ}{C} \cap V_t \neq \emptyset$. D'après le théorème général de caractérisation (théorème (1.4.4) de [41]), l'élément $\bar{x}$ de $C \cap V_t$ est solution de (P) si et seulement si

$$\Gamma(C_o;\bar{x}) \cap \Gamma(C;\bar{x}) \cap \Gamma^*(V_t;\bar{x}) = \emptyset$$

d'où le résultat.

Q.E.D.

On peut aussi caractériser les solutions du problème primal (P) à l'aide des solutions du problème $(\tilde{Q})$. C'est l'objet de la proposition suivante :

PROPOSITION 1.3 :

Si (H1) est vérifiée, une condition nécessaire et suffisante pour que $\bar{x}$ appartenant à $C \cap V_t$ soit solution de (P) est qu'il existe $[\bar{r},\bar{\ell}]$ dans $J \cap \mathbb{R} \times (V^\circ+z)$ tel que :

$$\langle \bar{x},\bar{\ell} \rangle = \bar{r}$$

où

$$J = \{((c,u'),w(u'))|u' \in M^+\}$$

DEMONSTRATION :

On utilise les théorèmes (7.5.1) et (7.5.2) de [41], $\bar{x}$ dans $C \cap V_t$ est solution de (P) si et seulement s'il existe u' dans M^- tel que :

$$\varphi(\bar{x},0) + (0,u') = 0 ,$$

soit :

(i) $$\langle \bar{x},z \rangle + (c,u') - \langle \bar{x},w(u') + z \rangle = 0$$

avec $w(u') + z$ dans V°.

En posant $\bar{u}' = -u'$, $(c,\bar{u}') = \bar{r}$ et $w(\bar{u}') = \bar{\ell}$ on a (i) qui s'écrit :

$$\langle \bar{x},z \rangle - \bar{r} + \langle \bar{x},\bar{\ell}-z \rangle = 0$$

avec $(\bar{r},\bar{\ell})$ dans $J \cap \mathbb{R} \times (V^\circ+z)$

L'appartenance de $\bar{\ell}$ à $V^\circ+z$ entraine :

$$\langle \bar{x},\bar{\ell}-z \rangle = \langle \bar{x},\bar{\ell}-z \rangle$$

L'égalité (i) s'écrit alors :

$$\langle \bar{x},\bar{\ell} \rangle = \bar{r}$$

C.Q.F.D.

Examinons maintenant le cas où V est de dimension finie. Dans toute la suite nous supposerons que V est de dimension n.
Soit $v_1,\ldots,v_n$ une base de V.

Notons a' l'application de S dans $\mathbb{R}^n$ définie par :

$$a'(s) = [< v_1,a(s) >,\ldots,< v_n,a(s) >]$$

On pose aussi :

$$z' = [< v_1,z >,\ldots,< v_n,z >] \in \mathbb{R}^n .$$

PROPOSITION 1.4 :

Si (H1) est vérifiée, une condition nécessaire et suffisante pour que l'élément $\bar{x}$ de $C \cap V_t$ soit solution de (P) est que dans $\mathbb{R}^n$ z' appartienne au cône convexe engendré par $a'(F(\bar{x}))$ où

$$F(\bar{x}) = \{s \in S \mid c(s) = <\bar{x},a(s)>\} .$$

DEMONSTRATION :

Lorsque V est de dimension n, le théorème 1.2 peut s'écrire de la façon suivante : $\bar{x}$ dans $C \cap V_t$ est solution de (P) si et seulement s'il n'existe pas de coefficients λ_i (i=1,...,n) tels que :

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i < v_i,-a(s) > < 0 \qquad \forall s \in F(\bar{x})$$

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i < v_i,z > < 0 .$$

Notons $\Omega = \{\lambda \in \mathbb{R}^n \mid (\lambda|-a'(s)) < 0 \ \forall s \in F(\bar{x}) \text{ et } (\lambda|z') < 0\}$,
où (|) désigne le produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$.

L'élément $\bar{x}$ de $C \cap V_t$ est donc solution si et seulement si $\Omega = \emptyset$.

D'après la proposition (3.3.5) de [41], Ω est vide si et seulement si 0 appartient à l'enveloppe convexe de $-a'(F(\bar{x})) \cup z'$. Mais l'hypothèse (H1) entraine que l'on ne peut avoir $0 \in co\ a'(F(\bar{x}))$ d'où le résultat.

Q.E.D.

On peut alors énoncer la proposition fondamentale de caractérisation suivante :

PROPOSITION 1.5 :

Si (H1) est vérifiée, une condition nécessaire et suffisante pour que $\bar{x}$ appartenant à $C \cap V_t$ soit solution de (P) est qu'il existe $[\bar{r},\bar{\ell}]$ dans $cc(j(S)) \cap \mathbb{R} \times (V^\circ+z)$ tel que :

$$\bar{r} = <\bar{x},\bar{\ell}> \quad \text{et} \quad [\bar{r},\bar{\ell}] = \sum_{i=1}^{k} \rho_i (c(s_i),a(s_i))$$

avec $j(s) = (c(s),a(s))$, $k \leq n$ et $\rho_i > 0$.

DEMONSTRATION :

Ceci résulte de la proposition (1.4) et du théorème de Carathéodory dans $\mathbb{R}^n$. On a en effet :

$$0 \in co(a'(F(\bar{x})) \cup -b') \quad \text{et} \quad 0 \notin co(a'(F(\bar{x}))$$

on peut donc trouver k éléments s_i de $F(\bar{x})$ avec $k \leq n$ tels que :

$$0 = \sum_{i=1}^{k} \omega_i a'(s_i) - \omega_o b' \qquad \text{avec} \quad \omega_i > 0 \quad i=0,\ldots,k$$

En posant $\rho_i = \omega_i/\omega_o$, $i=1,\ldots k$ on a :

$$b' = \sum_{i=1}^{k} \rho_i\ a'(s_i)$$

Ce qui peut encore s'écrire :

$$< v_j, z - \sum_{i=1}^{k} \rho_i a(s_i) > = 0 \qquad j=1,\ldots,n \ .$$

soit :

$$\sum_{i=1}^{k} \rho_i a(s_i) \in V^\circ + z$$

L'élément $\bar{x}$ appartenant à C, les relations

$$c(s_i) = < \bar{x}, a(s_i) > \qquad i=1,\ldots,k$$

sont équivalentes à :

$$\sum_{i=1}^{k} \rho_i \, c(s_i) = < \bar{x}, \sum_{i=1}^{k} \rho_i a(s_i) >$$

En posant $\bar{r} = \sum_{i=1}^{k} \rho_i \, c(s_i)$ et $\bar{\ell} = \sum_{i=1}^{k} \rho_i \, a(s_i)$

on a le résultat.

Q.E.D.

REMARQUE :

La proposition (1.5) exprime le fait que, lorsque V est de dimension n on peut remplacer dans la proposition 1.3 la mesure positive $\bar{u}'$ tel que $[\bar{r},\bar{\ell}] = [(c,\bar{u}'),w(\bar{u}')] \in J$ par une mesure positive à <u>support fini</u> faisant intervenir un nombre de points inférieur à n.

On notera (H2) l'hypothèse :

(H2) Dans $\mathbb{R}^n$ l'élément z' appartient à l'intérieur relatif du cône convexe engendré par a'(S).

Cette hypothèse peut aussi s'écrire :

(H2') L'ensemble $\{x \in V \mid < x,a(s) > \geq 0 \ \forall s \in S \ ; < x,z > = 0\}$ est un sous espace vectoriel.

PROPOSITION 1.6 :

Les hypothèses (H1) et (H2) entrainent que le problème (P) a au moins une solution .

DEMONSTRATION :

Le sous espace V étant de dimension finie, il existe u'_o dans M telle que la fonctionnelle $x' \mapsto \Psi(x',u'_o)$ soit quasi-d-continue ([41]). Si l'on pose :

$$f(x) = \begin{cases} < x,z > \text{ si } x \in V_t \text{ et } c(s) \leq < x,a(s) > \ , \ \forall s \in S \\ \\ + \infty \qquad \text{sinon} \end{cases}$$

L'ensemble $\{x \in X | f_\infty(x) = 0\}$ est ici égal à :

$$\{x \in V | < x,a(s) > \geq 0 \ \forall s \in S \ ; < x,z > = 0\} \ .$$

D'après le théorème (7.7.8) de [41], le problème (Q) est inf-diff-stable, il résulte alors que le problème (P) a au moins une solution.

Q.E.D.

Lorsque V est de dimension n, on peut aussi écrire d'une manière plus précise le problème dual $(\tilde{Q})$:

PROPOSITION 1.7 :

Les hypothèses (H1) et (H2) étant vérifiées on a :

$$\alpha = < \tilde{x},z > + \text{Max} \left[r - < \tilde{x},\ell > | \ (r,\ell) \in ccj(S) \cap \mathbb{R} \times (V^\circ + z) \right]$$

DEMONSTRATION :

Soit $\bar{x}$ dans $C \cap V_t$ une solution de (P). Il suffit de montrer que l'élément $[\bar{r},\bar{\ell}]$ qui caractérise $\bar{x}$ dans la proposition 1.5 est bien solution de $\tilde{Q}$.

Dans le problème dual $(\tilde{Q})$ on sait que l'on peut prendre pour $\tilde{x}$ un élément quelconque de V_t. Prenons $\tilde{x} = \bar{x}$. Pour $\tilde{u}'$ dans M^+ définie par $(u,\tilde{u}') = \sum_{i=1}^{k} \rho_i \, u(s_i)$ où les $\rho_i > 0$ et les s_i de S sont ceux qui caractérisent $[\bar{r},\bar{\ell}]$ dans la proposition (1.5), on a :

$$< \bar{x},z > + (c,\tilde{u}') - < \bar{x},w(\tilde{u}') > = < \bar{x},z > + \bar{r} - < \bar{x},\bar{\ell} >$$

Or on a :

$$< \bar{x},z > = \alpha \quad \text{et} \quad \bar{r} = < \bar{x},\bar{\ell} >$$

d'où :

$$\alpha = < \tilde{x},z > + \bar{r} - < \tilde{x},\bar{\ell} >$$

avec

$$(\bar{r},\bar{\ell}) \text{ dans } ccj(S) \cap \mathbb{R} \times (V^{\circ}+z).$$

Q.E.D.

CHAPITRE 2

ALGORITHME D'ECHANGE ITERATIF POUR LA MINIMISATION D'UNE FONCTIONNELLE LINEAIRE SUR UNE INTERSECTION DE DEMI ESPACES DANS LE TRANSLATE D'UN SOUS ESPACE VECTORIEL.

A partir du problème dual formé au chapitre 1, on décrit un algorithme appelé "Algorithme d'échange" qui minimise une fonctionnelle linéaire sur une intersection de demi espaces.

On applique l'algorithme à la minimisation d'une fonction convexe.

On va décrire un algorithme permettant de résoudre :

$$\alpha = \text{Min}\,[\langle x,z\rangle \,|\, c(s) \leq \langle x,a(s)\rangle \;\forall s \in S \text{ et } x \in V_t]$$

On supposera que V_t est le translaté d'un sous espace vectoriel V de dimensi p engendré par $v_1,\ldots,v_p$.

On étudie d'abord le cas où X est l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ et $V_t = \mathbb{R}^n$.

2.1 MINIMISATION D'UNE FONCTIONNELLE LINEAIRE DANS UN CONVEXE DE $\mathbb{R}^n$

Soit z un élément de $\mathbb{R}^n$, S un compact, c et a deux applications continues de (respectivement) S dans $\mathbb{R}$ et S dans $\mathbb{R}^n$.
On se propose de rechercher un élément $\bar{x}$ de $\mathbb{R}^n$ tel que :

$$\alpha = (\bar{x}|z) = \text{Min}\,[(x|z) \,|\, c(s) \leq (x|a(s)),\ \forall s \in S]$$

On suppose vérifiées les hypothèses :

HO α est fini

H1 il existe un élément x^* de $\mathbb{R}^n$ tel que $c(s) < (x^*|a(s))$ pour tout s dans S

H2 l'élément z appartient à l'intérieur relatif du cône convexe engendré par $a(S)$.

On sait alors (chapitre 1) que $\bar{x}$ existe et que l'on a :

$$\alpha = -\beta = \text{Max}\,[r|(r,z) \in cc(j(S))]$$

avec $j(s) = (c(s), a(s))$.

Plus précisément on a :

$$-\beta = \text{Max}\Big[\sum_{j=1}^{n} \rho_j c(s_j) \Big| \sum_{j=1}^{n} \rho_j a(s_j) = z \ , \ \rho_j \geq 0 \text{ et } s_j \in S \quad j=1,\ldots,n\Big]$$

L'algorithme d'échange est basé sur cette formule de dualité.

DESCRIPTION DE L'ALGORITHME D'ECHANGE

On dispose à l'étape k de n points s_j^k $(j=1,\ldots,n)$ de S et de n coefficients strictement positifs ρ_j^k $(j=1,\ldots,n)$ tels que :

$$z = \sum_{j=1}^{n} \rho_j^k \, a(s_j^k)$$

On pose :

$$d^k = \sum_{j=1}^{n} \rho_j^k \, c(s_j^k)$$

On note x^k l'élément de $\mathbb{R}^n$ tel que :

$$c(s_j^k) = (x^k|a(s_j^k)) \ , \ j=1,\ldots,n$$

On a donc aussi :

$$d^k = (x^k|z)$$

On pose :

$$\bar{d}^k = \text{Max}_{s\in S}\,[c(s) - (x^k|a(s))] + d^k$$

D'après la définition de x^k, on a $\bar{d}^k - d^k \geq 0$.

PREMIER CAS : $d^k < \bar{d}^k$

On détermine un élément z^{k+1} de S tel que :

$$c(z^{k+1})-(x^k|a(z^{k+1})) = \underset{s\in S}{\text{Max}} [c(s)-(x^k|a(s))]$$

et un indice j_o^k de $\{1,\ldots,n\}$ tel que, en posant :

$$s_j^{k+1} = \begin{cases} s_j^k & j \neq j_o^k \\ z^{k+1} & \text{si } j = j_o^k \end{cases} \qquad j=1,\ldots,n .$$

on puisse trouver des coefficients ρ_j^{k+1} $(j=1,\ldots,n)$ tels que :

$$\rho_j^k \geq 0 \quad \text{et} \quad z = \sum_{j=1}^{n} \rho_j^{k+1} a(s_j^{k+1}) .$$

DEUXIEME CAS : $d^k = \bar{d}^k$

On pose alors conventionnellement :

$$s_j^{k+1} = s_j^k \quad \text{et} \quad \rho_j^{k+1} = \rho_j^k \quad (j=1,\ldots,n)$$

ce qui entraîne $x^{k+1} = x^k$

(Dans la pratique on arrête l'algorithme).

DEFINITION 2.1 :

On dit que l'algorithme d'échange est itératif si pour tout k on a :

$$\rho_j^k > 0 \quad j=1,\ldots,n .$$

REMARQUES :

1) On doit évidemment se donner au départ les éléments s_j^o et ρ_j^o $(j=1,\ldots,n)$. Ces éléments existent d'après l'hypothèse H2.

2) La définition 2.1 revient à dire que, à chaque étape k, z appartient à l'intérieur du cône convexe engendré par les éléments $a(s_j^k)$ $(j=1,\ldots,n)$ de $\mathbb{R}^n$.

3) D'après la proposition 1.2, on peut à chaque étape ne rechercher le point z^{k+1} que dans l'ensemble des points extrémaux de $\mathbf{j}(S)$ ou dans un ensemble E contenant tous ces points extrémaux.

4) Il est en général numériquement impossible d'avoir le point z^{k+1} de S qui réalise exactement le maximum de $c(s) - (x^k \mid a(s))$ sur S. On obtient le plus souvent une relation de la forme :

$$c(z^{k+1}) - (x^k|a(z^{k+1})) = \underset{s\in S}{\text{Max}} [c(s) - (x^k|a(s))] - \eta^k$$

avec $\eta^k > 0$. Nous verrons quelle propriété doit vérifier la suite $\{\eta^k\}$ pour que l'algorithme converge.

2.2 MINIMISATION D'UNE FONCTIONNELLE LINEAIRE DANS UN CONVEXE DU TRANSLATE D'UN SOUS ESPACE VECTORIEL DE X.

On se place maintenant dans le cas du chapitre 1.

$$(P) \qquad \alpha = \text{Inf} [< x,z > | x \in V+\tilde{x} \quad \text{et} \quad c(s) \leq < x,a(s) > \quad \forall s \in S]$$

On suppose encore que sont vérifiées les hypothèses H0, H1, et H2, voir chapitre 1, et que V est de dimension n .

Soit $v_1,\ldots,v_n$ une base de V.

PROPOSITION 2.1 :

Une condition nécessaire et suffisante pour que $\bar{x} = \sum_{j=1}^{n} \bar{\lambda}_j v_j$ soit une solution de (P) est que le vecteur : $\bar{\lambda} = (\bar{\lambda}_1,\ldots,\bar{\lambda}_n)$ soit solution du problème de minimisation :

$$(P') \qquad \alpha = <\tilde{x},z> + \text{Min} [(\lambda|z')|c'(s) \leq (\lambda|a'(s)) \quad s \in S]$$

avec :

$$z' = (< v_1,z >,\ldots,< v_n,z >) \quad c'(s) = c(s) - < \tilde{x},a(s) > \text{ et}$$

$$a'(s) = (< v_1,a(s) >,\ldots,< v_n,a(s) >) .$$

DEMONSTRATION :

Tout élément x de V_t peut s'écrire :

$$x = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j v_j + \tilde{x} \quad (\lambda_j \in \mathbb{R})$$

on a alors :

$$< x,z > = <\tilde{x},z > + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j < v_j,z > = < \tilde{x},z > + (\lambda | z')$$

en notant $(.|.)$ le produit scalaire euclidien de $\mathbb{R}^n$.

De même :

$$< x,a(s) > = <\tilde{x},a(s) > + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j < v_j,a(s) > = <\tilde{x},a(s) > + (\lambda | a'(s))$$

par suite, la relation $c(s) \leq < x,a(s) >$ s'écrit pour x dans V_t :

$$c'(s) \leq (x | a'(s))$$

d'où le résultat.

Q.E.D.

REMARQUE :

La proposition précédente nous permet de résoudre le problème (P) exactement comme en 2.1.1.

Nous allons expliciter les différentes étapes de l'algorithme.

ETAPE k :

On a :

$$z' = \sum_{j=1}^{n} \rho_j^k \, a'(s_j^k) \quad \text{avec} \quad \rho_j^k > 0$$

ou :

$$< v_i, \sum_{j=1}^{n} \rho_j^k a(s_j^k) - z > = 0 \quad , \quad i=1,\ldots,n$$

soit :

$$(1) \qquad \sum_{j=1}^{n} \rho_j^k a(s_j^k) - z \in V^o$$

On pose

$$d^k = \sum_{j=1}^{n} \rho_j^k c'(s_j^k)$$

Soit :

$$(2) \qquad d^k = \sum_{j=1}^{n} \rho_j^k c(s_j^k) - < \tilde{x}, \sum_{j=1}^{n} \rho_j^k a(s_j^k) >$$

On note λ^k l'élément de $\mathbb{R}^n$ tel que :

$$c'(s_j^k) = (\lambda^k | a'(s_j^k)) \qquad j=1,\ldots,n$$

soit :

$$c(s_j^k) = < \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^k v_j + \tilde{x}, a(s_j^k) > \qquad j=1,\ldots,n$$

L'élément $x^k = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^k v_j + \tilde{x}$ de V_t est donc déterminé par l'équation :

$$(3) \qquad c(s_j^k) = < x^k, a(s_j^k) > \ , \qquad j=1,\ldots,n \ .$$

On a aussi :

$$(4) \qquad d^k = (\lambda^k | z') = < x^k, z > - < \tilde{x}, z >$$

PASSAGE A L'ETAPE k+1 :

On détermine un élément z^{k+1} de S tel que :

$$\bar{d}^k - d^k = c'(z^{k+1}) - (\lambda^k | a'(z^{k+1})) = \sup_{s \in S} [c'(s) - (\lambda^k | a'(s))]$$

soit :

$$(5) \qquad \bar{d}^k - d^k = c(z^{k+1}) - \langle x^k, a(z^{k+1}) \rangle = \sup_{s \in S} [c(s) - \langle x^k, a(s) \rangle]$$

PREMIER CAS : $\bar{d}^k > d^k$

On détermine un indice j_o^k de $\{1,\ldots,n\}$ tel que, en posant :

$$s_j^{k+1} = \begin{cases} s_j^k & j \neq j_o^k \\ z^{k+1} & j = j_o^k \end{cases} \qquad j=1,\ldots,n$$

on puisse trouver des coefficients ρ_j^{k+1} $(j=1,\ldots,n)$ tels que :

$\rho_j^{k+1} \geq 0$ et :

$$z' = \sum_{j=1}^{n} \rho_j^{k+1} a'(s_j^{k+1})$$

ou

$$(6) \qquad \sum_{j=1}^{n} \rho_j^{k+1} a(s_j^{k+1}) - z \in V^o$$

DEUXIEME CAS : $\bar{d}^k = d^k$

On pose alors conventionnellement :

$$s_j^{k+1} = s_j^k \quad , \quad \rho_j^{k+1} = \rho_j^k \quad \text{et} \quad x^{k+1} = x^k$$

(Dans la pratique l'algorithme s'arrête).

DEFINITION :

Comme en 2.1, on dit que l'algorithme est itératif si pour tout k, $\rho_j^k > 0$ $(j=1,\ldots,n)$.

2.3 MINIMISATION D'UNE FONCTION CONVEXE.

On considère le problème de minimisation :

$$(P) \qquad \alpha = \mathrm{Inf}\,[f(x) \,|\, c(s) \leq < x, a(s) > \ \forall s \in S \text{ et } x \in V_t]$$

où f est une fonction convexe continue sur un e.v.t.ℓ.c.s.(*) X dont la restriction de la polaire f^* est continue sur dom f^* ; on suppose dom f^* faiblement compact dans X'. La variété linéaire V_t est de dimension n.
Nous allons décrire l'algorithme d'échange dans ce cas :
On a :

$$f(x) = \sup_{x' \in \mathrm{dom}\, f^*} [< x,x' > - f^*(x')]$$

Par suite :

$$\alpha = \mathrm{Inf}\,[e \,|\, c(s) \leq < x, a(s) > \ \forall s \in S$$

$$-f^*(x') \leq - < x,x' > + e \ \forall x' \in \mathrm{dom}\, f^* \text{ et } x \in V + \tilde{x}]$$

Si on note :

$$< (x,e),(x',e') > = < x,x' > + ee'$$

la forme bilinéaire mettant en dualité $X \times \mathbb{R}$ avec $X' \times \mathbb{R}$; on peut écrire le problème (P) sous la forme :

$$(P') \qquad \alpha = \mathrm{Inf}\,[< (x,e),(0,1) > \,|\, c(s) \leq < (x,e),(a(s),0) > \ \forall s \in S$$

$$-f^*(x') \leq < (x,e),(-x',1) > \ \forall x' \in \mathrm{dom}\, f^*$$

$$\text{et} \quad (x,e) \in V \times \mathbb{R} + (\tilde{x},0)]$$

Le problème (P') a alors la forme générale du problème type du paragraphe 2.2.

Nous allons expliciter l'algorithme dans ce cas en remarquant que $W = V \times \mathbb{R}$ est de dimension n+1 et $W^\circ = V^\circ \times \{0\}$.

(*) e.v.t.ℓ.c.s. = espace vectoriel topologique localement convexe séparé.

ETAPE k :

On a :

$$\sum_{j\in J_1^k} \rho_j^k(-x_j'^k,1) + \sum_{j\in J_2^k} \rho_j^k(a(s_j^k),0)-(0,1) \in V^o \times \{0\}$$

avec $x_j'^k \in \text{dom } f^*$ et $s_j^k \in S$

Soit :

$$\sum_{j\in J_2^k} \rho_j^k a(s_j^k)- \sum_{j\in J_1^k} \rho_j^k x'^k_j \in V^o$$

(1)
$$\sum_{j\in J_1^k} \rho_j^k = 1 \quad \text{et} \quad \text{card } J_1^k+\text{card } J_2^k = n+1 \quad \text{et} \quad \text{card } J_1^k \geq 1$$
$$J_1^k \cup J_2^k = \{1,\ldots,n\} .$$

on a :

$$d^k = \sum_{j\in J_1^k} \rho_j^k(-f^*(x_j'^k))+ \sum_{j\in J_2^k} \rho_j^k c(s_j^k)$$

$$- < \tilde{x}, \sum_{j\in J_1^k} \rho_j^k(-x_j'^k)+ \sum_{j\in J_2^k} \rho_j^k a(s_j^k) >$$

soit :

(2) $$d^k = \sum_{j\in J_1^k} \rho_j^k(< \tilde{x},x_j'^k>-f^*(x_j'^k))+ \sum_{j\in J_2^k} \rho_j^k(c(s_j^k)- < \tilde{x},a(s_j^k)>)$$

On a (x^k,e^k) de $X \times \mathbb{R}$ qui est déterminé par :

$$< x^k,x_j'^k >-f^*(x_j'^k) = e^k \quad \text{pour} \quad j \in J^k ,$$

et

$$c(s_j^k) = < x^k,a(s_j^k) > \quad \text{pour} \quad j \in J_2^k .$$

Mais de la relation :

$$d^k = < (x^k,e^k),(0,1) > - < (\tilde{x},0),(0,1) > , \text{ on tire}$$

$$d^k = e^k .$$

Par suite :

$$(3)\qquad \begin{aligned} &< x^k, x_j'^k > - f^*(x_j'^k) = d^k \quad , \quad j \in J_1 \ , \\ &< x^k, a(s_j^k) > = c(s_j^k) \quad , \quad j \in J_2 \ . \end{aligned}$$

PASSAGE A L'ETAPE k+1

On calcule :

$$\bar{d}^k - d^k = \text{Max} \Big[\underset{x' \in \text{dom } f^*}{\text{Max}} \left(-f^*(x') - < (x^k, d^k), (-x', -1) > \right) ; \ \underset{s \in S}{\text{Max}} \left(c(s) - < x^k, a(s) > \right) \Big]$$

ou

$$\bar{d}^k - d^k = \text{Max} \left[f(x^k) - d^k \ ; \ \underset{s \in S}{\text{Max}} \left(c(s) - < x^k, a(s) > \right) \right]$$

PREMIER CAS : $\bar{d}^k \geq d^k$

a) $\bar{d}^k - d^k = f(x^k) - d^k$ ou $\bar{d}^k = f(x^k)$

On considère alors un élément z^{k+1} de dom f^* tel que :

$$< x^k, z^{k+1} > - f^*(z^{k+1}) = f(z^{k+1})$$

ou :

$$z^{k+1} \in \partial f(x^k)$$

b) $\bar{d}^k - d^k = \underset{s \in S}{\text{Max}} \left(c(s) - < x^k, a(s) > \right)$

On cherche alors un élément z^{k+1} de S tel que :

$$c(z^{k+1}) - < x^k, a(z^{k+1}) > = \underset{s \in S}{\text{Max}} \left(c(s) - < x^k, a(s) > \right)$$

On détermine un indice j_o^k de $J_1 \cup J_2$ tel que, en échangeant l'élément $s_{j_o^k}^k$ (ou $x'^k_{j_o^k}$) correspondant avec z^{k+1}, on puisse trouver des coefficients $\rho_j^{k+1} > 0$ tels que :

$$\sum_{j \in J_2^{k+1}} \rho_j^{k+1} a(s_j^{k+1}) - \sum_{j \in J_1^{k+1}} \rho_j^{k+1} x_j'^{k+1} \in V^o \qquad \sum_{j \in J_1^{k+1}} \rho_j^{k+1} = 1$$

avec :

a) si $z^{k+1} \in \text{dom } f^*$ et $j_o^k \in J_1^k$

$$J_2^{k+1} = J_2^k \quad ; \quad J_1^{k+1} = J_1^k$$

$$s_j^{k+1} = s_j^k \quad j \in J_2^{k+1} \quad \text{et} \quad x_j'^{k+1} = \begin{cases} x_j'^k & \text{si} \quad j \neq j_o^k \\ z^{k+1} & j = j_o^k \end{cases} \qquad j \in J_1^{k+1}$$

b) si $z^{k+1} \in \text{dom } f^*$ et $j_o^k \in J_2^k$

$$J_2^{k+1} = J_2^k - \{j_o^k\} \quad ; \quad J_1^{k+1} = J_1^k + \{j_o^k\}$$

$$s_j^{k+1} = s_j^k \quad \text{si } j \in J_2^{k+1} \quad \text{et} \quad x_j'^{k+1} = \begin{cases} x_j'^k & \text{si} \quad j \neq j_o^k \\ z^{k+1} & \text{si} \quad j = j_o^k \end{cases} \qquad j \in J_1^{k+1}$$

c) si $z^{k+1} \in S$ et $j_o^k \in J_1^k$

$$J_2^{k+1} = J_2^k + \{j_o^k\} \quad ; \quad J_1^{k+1} = J_1^k - \{j_o^k\}$$

$$s_j^{k+1} = \begin{cases} s_j^k & \text{si} \quad j \neq j_o^k \\ z^{k+1} & \text{si} \quad j = j_o^k \end{cases} \quad j \in J_2^{k+1} \quad \text{et} \quad x_j'^{k+1} = x_j'^k \quad j \in J_1^{k+1}$$

d) si $z^{k+1} \in S$ et $j_o^k \in J_2^k$

$$J_2^{k+1} = J_2^k \quad \text{et} \quad J_1^{k+1} = J_1^k$$

$$s_j^{k+1} = \begin{cases} s_j^k & \text{si } j \neq j_o^k \\ z^{k+1} & \text{si } j = j_o^k \end{cases} \quad j \in J_2^{k+1} \quad \text{et} \quad x_j'^{k+1} = x_j'^k \quad j \in J_1^{k+1}$$

DEUXIEME CAS : $\bar{d}^k = d^k$

On pose alors conventionnellement :

$$s_j^{k+1} = s_j^k \quad j \in J_2^k = J_2^{k+1} \qquad x_j'^{k+1} = x_j'^k \quad j \in J_1^{k+1} = J_1^k$$

et $x^{k+1} = x^k$.

2.4 CONVERGENCE DE L'ALGORITHME D'ECHANGE LORSQU'IL EST ITERATIF.

Nous avons vu que le problème de la minimisation d'une fonctionnelle linéaire ou d'une fonction convexe f telle que dom f^* soit compact dans le translaté d'un sous espace vectoriel de dimension fini se ramenait au problème

(P) $\quad \alpha = \text{Min}[(x|z) | c(s) \leq (x|a(s)) \ \forall s \in S]$

du paragraphe 2.1.1.

Nous démontrerons donc la convergence de l'algorithme d'échange dans ce cas.

DEFINITION :

On dira que la suite $\{\eta^i\}$ i=1,2,... de réels positifs ou nuls représente la précision de l'algorithme d'échange si, à chaque étape k on a :

$$\bar{d}^k - d^k = \max_{s \in S} [c(s) - (x^k|a(s))] = c(z^{k+1}) - (x^k|a(z^{k+1})) + \eta^k$$

$$\text{avec } \bar{d}^k - d^k - \eta^k > 0$$

On fait les hypothèses :

H1 il existe x^* dans $\mathbb{R}^n$ tel que $c(s) < (x^*|a(s)) \ \forall s \in S$

H2 z appartient à l'intérieur du cône convexe engendré par a(S).

H3 l'algorithme est itératif.

LEMME 2.1 :

La suite $\{d^k\}$ est croissante et bornée supérieurement par $(x^*|z)$. On a plus précisément :

$$d^{k+1} - d^k = \rho_{j_o^k}^{k+1} (\bar{d}^k - d^k - \eta^k)$$

DEMONSTRATION :

On a :

$$d^{k+1} = \sum_{j=1}^{n} \rho_j^{k+1} c(s_j^{k+1})$$

et

$$c(s_j^k) = (x^k | a(s_j^k)) \quad j=1,\ldots,n$$

ou, par définition de s_j^{k+1}

$$c(s_j^{k+1}) = (x^k | a(s_j^{k+1})) \quad j=1,\ldots,n \quad j \neq j_o^k$$

On peut donc écrire d^{k+1} sous la forme :

$$d^{k+1} = (x^k | \sum_{j=1}^{n} \rho_j^{k+1} a(s_j^{k+1})) - (x^k | \rho_{j_o^k}^{k+1} a(s_{j_o^k}^{k+1})) + \rho_{j_o^k}^{k+1} c(s_{j_o^k}^{k+1})$$

Des relations :

$$\sum_{j=1}^{n} \rho_j^{k+1} a(s_j^{k+1}) = z \qquad (x^k | z) = d^k \quad \text{et} \quad s_{j_o^k}^{k+1} = z^{k+1}$$ on tire :

$$d^{k+1} = d^k + \rho_{j_o^k}^{k+1} [c(z^{k+1}) - (x^k | a(s^{k+1}))]$$

Soit :

$$d^{k+1} - d^k = \rho_{j_o^k}^{k+1} (\bar{d}^k - d^k - \eta^k)$$

L'algorithme étant itératif (hypothèse H3) on a $\rho_{j_o^k}^{k+1} > 0$.

La suite $\{d^k\}$ est donc croissante.

On a par ailleurs (hypothèse H1) :

$$c(s) < (x^* | a(s)) \quad \text{par suite}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \rho_j^k c(s_j^k) < (x^* | \sum_{j=1}^{n} \rho_j^k a(s_j^k))$$

soit :

$$d^k < (x^* | z) \ .$$

C.Q.F.D.

LEMME 2.2 :

Si la précision $\{\eta^k\}$ de l'algorithme d'échange est telle que :

$$\lim_{k\to\infty} \eta^k = 0$$

et s'il existe $s > 0$ tel que :

$$0 < s \leq \rho_{j_o}^{k+1} \quad \text{alors :}$$

$$\lim_{k\to\infty} (\bar{d}^k - d^k) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{k\to\infty} d^k = \alpha \quad .$$

DEMONSTRATION :

A partir du lemme 2.1 on tire :

$$\bar{d}^k - d^k \leq \frac{1}{s} (d^{k+1} - d^k) + \eta^k$$

La suite $\{d^k\}$ étant croissante et bornée supérieurement converge, on a donc si $\lim_{k\to\infty} \eta^k = 0$:

$$\lim_{k\to\infty} (\bar{d}^k - d^k) = 0$$

Montrons que $\lim_{k\to\infty} d^k = \alpha$

Les hypothèses H0, H1 et H2 entrainent (proposition 1.1) que :

$$d^k \leq \alpha$$

Notons $\tilde{d}$ la limite de la suite croissante $\{d^k\}$, ou $\tilde{d} \leq \alpha$.
Supposons que $\tilde{d} < \alpha$. La proposition 1.1 nous assure l'existence d'un scalaire d tel que :

$$d = \sum_{j=1}^{n} \rho_j c(s_j) \quad \text{avec} \quad \sum_{j=1}^{n} \rho_j a(s_j) = z \qquad \rho_j \geq 0 \quad j=1,\ldots,n$$

et

$$\tilde{d} < d \leq \alpha \quad .$$

Posons $d-\tilde{d} = \mu > 0$

Il existe un élément $\bar{s}$ de S tel que :

$$c(\bar{s})-(x^k|a(\bar{s})) \geq \frac{\mu}{\sum_{j=1}^{n} \rho_j} \quad \text{pour tout } k \text{ de } \mathbb{N} .$$

(Sinon, pour un indice k_o on aurait :

$$c(s)-(x^{k_o}|a(s)) < \mu \times \frac{1}{\sum_{j=1}^{n} \rho_j} \quad \text{pour tout } s \text{ dans } S$$

et par suite :

$$\sum_{j=1}^{n} \rho_j c(s_j) - (x^{k_o}|z) = d-d^{k_o} < \mu \ )$$

On a alors :

$$\bar{d}^k-d^k = \sup_{s\in S} [c(s)-(x^k|a(s))] \geq c(\bar{s})-(x^k|a(\bar{s}))$$

et

$$\bar{d}^k-d^k \geq \frac{\mu}{\sum_{j=1}^{n} \rho_j}$$

On ne pourrait avoir $\lim_{k\to\infty} (\bar{d}^k-d^k) = 0$

On a donc $\lim_{k\to\infty} d^k = \alpha$

Q.E.D.

LEMME 2.3 :

Si on note A l'enveloppe convexe de $z \cup a(S)$, il existe une constante r strictement positive telle que

$$A \cup -A \subset r.A$$

DEMONSTRATION :

L'hypothèse H2 étant vérifiée, il existe $\rho_j > 0 \quad (j=1,\ldots,n)$ strictement positifs tels que :

$$z = \sum_{j=1}^{n} \rho_j a(s_j) \quad \text{avec} \quad s_j \in S$$

par suite :

$$0 = \frac{1}{K} z + \sum_{j=1}^{n} \frac{\rho_j}{K} (-a(s_j))$$

avec $$K = 1 + \sum_{j=1}^{n} \rho_j > 0$$

et

$$0 = \frac{1}{K} (-z) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\rho_j}{K} a(s_j)$$

On a donc 0 qui appartient à l'intérieur de $A \cap (-A)$.

On note $B(0,\varepsilon)$ une boule de centre 0 et de rayon ε contenue dans $A \cup -A$; S étant compact, $A \cup -A$ est borné, il existe donc $\mu > 0$ tel que :

$$A \cup -A \subset B(0,\mu)$$

De la relation :

$$B(0,\varepsilon) \subset A$$

on tire :

$$B(0,\mu) = \frac{\mu}{\varepsilon} B(0,\varepsilon) \subset \frac{M}{\varepsilon} A$$

En posant $r = \frac{M}{\varepsilon}$ on a le résultat.

Q.E.D.

THEOREME 2.1 :

Les hypothèses H1, H2 et H3 étant vérifiées, si la précision $\{\eta^k\}$ de l'algorithme est telle que :

$$\lim_{k\to\infty} \eta^k = 0$$

alors :

i) $\lim_{k\to\infty} d^k = \alpha$

ii) il existe une sous suite $\{d^{\psi(k)}\}$ de $\{d^k\}$ telle que :

$$\lim_{k\to\infty} (\bar{d}^{\psi(k)} - d^{\psi(k)}) = 0 \ .$$

DEMONSTRATION :

Si pour tout j la suite $\{\rho_j^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée inférieurement par un scalaire strictement positif on a d'après le lemme 2.2 :

$$\lim_{k\to\infty} d^k = \alpha \quad \text{et} \quad \lim_{k\to\infty} (\bar{d}^k - d^k) = 0$$

le théorème est donc démontré dans ce cas.

Supposons maintenant que $\{\rho_j^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ ne soit pas bornée inférieurement par un scalaire strictement positif.

Soit i_1 un indice de $\{1,\ldots,n\}$ tel que $\{\rho_{i_1}^k\}$ ne soit pas borné inférieurement par une quantité strictement positive. On peut alors extraire une sous suite définie par : $\varphi_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que :

$$\lim_{k\to\infty} \rho_{i_1}^{\varphi_1(k)} = 0$$

S'il existe $i_2 \in \{1,\ldots,n\} - i$, tel que :

$$\underline{\lim} \ \rho_{i_2}^{\varphi_1(k)} = 0$$

on extrait de $\{\rho_{i_2}^{\varphi_1(k)}\}$ une sous suite définie par $\varphi_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que :

$$\lim_{k\to\infty} \rho_{i_2}^{\varphi_2(k)} = 0$$

On continue cette opération jusqu'à ce qu'on ait une sous suite définie par $\varphi_p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que :

1) $\lim_{k\to\infty} \rho_i^{\varphi_p(k)} = 0$ pour tout i dans $I_o = \{i_1,\ldots,i_p\}$

2) il existe $\mu > 0$ tel que pour tout i dans I_1 complémentaire de I_o dans $\{1,\ldots,n\}$ on ait :

$$\mu < \rho_i^{\varphi_p(k)}$$

Remarquons que l'ensemble I_1 est non vide ; en effet, de la relation

$$z = \sum_{j=1}^{n} \rho_j^k a(s_j^k)$$

on tire :

$$0 < \frac{\|z\|}{\underset{s\in S}{\text{Max}}\ |a(s)|} \leq \sum_{j=1}^{n} \rho_j^k$$

Démontrons le lemme technique :

LEMME 2.4 :

Il est impossible que, pour k fixé, l'on ait pour tout $k' > k$

$$\{s_i^{\varphi_p(k')} \ ; \ i \in I_1\} \subset \{s_i^{\varphi_p(k)} \ ; \ i=1,\ldots,n\} \ .$$

DEMONSTRATION :

D'après l'hypothèse H1, on a :

$$\underset{s\in S}{\text{Max}}\ [c(s)-(x^*|a(s))] = d < 0$$

d'où :

$$\sum_{j=1}^{n} \rho_j^k c(s_j^k) - (x^* | \sum_{j=1}^{n} \rho_j^k a(s_j^k)) \leq d \sum_{j=1}^{n} \rho_j^k < 0$$

et

$$0 < \sum_{j=1}^{n} \rho_j^k . |d| \leq |d^k| + \|x^*\| . \|z\|$$

Par suite :

$$\sum_{j=1}^{n} \rho_j^k \leq \frac{1}{|d|} \left(|\tilde{d}| + \|x^*\| . \|z\|\right) = k$$

avec $\tilde{d} = \lim_{k\to\infty} d^k$.

La suite $\{\rho_j^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ étant bornée pour tout $j \in \{1,\ldots,n\}$, on peut extraire de $\{\rho_{i_{p+1}}^{\varphi_p(k)}\}_{k\in\mathbb{N}}$ pour i_{p+1} dans I_1, une sous suite définie par $\{\rho_{i_{p+1}}^{\varphi_{p+1}(k)}\}_{k\in\mathbb{N}}$ convergeant ver $\rho_{i_{p+1}} > 0$; on peut de même extraire de $\{\rho_{i_{p+2}}^{\varphi_{p+1}(k)}\}_{k\in\mathbb{N}}$ (i_{p+2} dans I_1) une sous suite définie par $\varphi_{p+2} : \mathbb{N}\to\mathbb{N}$ telle que

$$\lim_{k\to\infty} \rho_{i_{p+2}}^{\varphi_{p+2}(k)} = \rho_{i_{p+2}} > 0$$

En opérant ainsi sur tous les indices de I_1, on dispose d'une sous suite définie par $\varphi_n : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que :

$$\lim_{k\to\infty} \rho_j^{\varphi_n(k)} = 0 \text{ pour } j \text{ dans } I_o$$

$$\lim_{k\to\infty} \rho_j^{\varphi_n(k)} = \rho_j \text{ pour } j \text{ dans } I_1 \text{ avec } \rho_j \geq \mu > 0$$

Si le lemme n'est pas vérifié on a :

$$z = \sum_{j\in I_o} \rho_j^{\varphi_n(k')} a(s_j^{\varphi_n(k')}) + \sum_{j\in I_1} \rho_j^{\varphi_n(k')} a(s_j^{\varphi_n(k)})$$

pour tout $k' > k$.

En faisant tendre k' vers l'infini on aurait

$$z = \sum_{j\in I_1} \rho_j a(s_j^{\varphi_n(k)})$$

ce qui est impossible car $z = \sum_{j=1}^{n} \rho_j^{\varphi_n(k)} a(s_j^{\varphi_n(k)})$ avec $\rho_j^{\varphi_n(k)} > 0$.

Le lemme est donc démontré.

Q.E.D.

Quitte à extraire de $\{s_j^{\varphi_p(k)}\}_{k\in\mathbb{N}}$ une nouvelle sous suite définie par $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, on peut supposer d'après le lemme que l'ensemble : $\{s_j^{\varphi(k+1)} ; j \in I_1\}$ contient au moins un point nouveau par rapport à l'ensemble $\{s_j^{\varphi(k)} ; j=1,\ldots,n\}$.

Notons $s_{e(k)}^{\varphi(k+1)}$ le dernier élément nouveau introduit et supposons qu'il ait été introduit à l'itération $\Psi(k)$

$$(\varphi(k) \leq \Psi(k) < \varphi(k+1)) .$$

On a donc :

$$s_j^{\varphi(k+1)} = \begin{cases} s_j^{\Psi(k)} & \text{si} \quad j \neq e(k) \\ s_j^{\Psi(k)+1} & \text{si} \quad j = e(k) \end{cases} \qquad j \in I_1$$

De la relation :

$$d^{\varphi(k+1)} = \sum_{j\in I_o} \rho_j^{\varphi(k+1)} c(s_j^{\varphi(k+1)}) + \sum_{j\in I_1} \rho_j^{\varphi(k+1)} c(s_j^{\varphi(k+1)})$$

on déduit, en retranchant la quantité :

$$d^{\Psi(k)} = (x^{\Psi(k)}|z) = \sum_{j=1}^{n} \rho_j^{\varphi(k+1)} (x^{\Psi(k)}|a(s_j^{\varphi(k+1)}))$$

des deux membres :

$$d^{\varphi(k+1)} - d^{\Psi(k)} = \sum_{j\in I_o} \rho_j^{\varphi(k+1)} [c(s_j^{\varphi(k+1)}) - (x^{\Psi(k)}|a(s_j^{\varphi(k+1)}))]$$

$$+ \sum_{\substack{j\in I_1 \\ j\neq e(k)}} \rho_j^{\varphi(k+1)} [c(s_j^{\Psi(k)}) - (x^{\Psi(k)}|a(s_j^{\Psi(k)}))]$$

$$+ \rho_{e(k)}^{\varphi(k+1)} (\bar{d}^{\Psi(k)} - d^{\Psi(k)} - \eta^{\Psi(k)}) \quad .$$

En tenant compte de la définition de $x^{\Psi(k)}$ et en ajoutant $\sum_{j\in I_o} \rho_j^{\varphi(k+1)}(x^{\Psi(k)}|z)$ aux deux membres il vient :

$$d^{\varphi(k+1)}+(\varepsilon(k)-1)d^{\Psi(k)} = \sum_{j\in I_o} \rho_j^{\varphi(k+1)}[c(s_j^{\varphi(k+1)})-(x^{\Psi(k)}|a(s_j^{\varphi(k+1)})-z)]$$

$$+ \rho_{e(k)}^{\varphi(k+1)}(\bar{d}^{\Psi(k)}-d^{\Psi(k)}-\eta^{\Psi(k)})$$

avec $\varepsilon(k) = \sum_{j\in I_o} \rho_j^{\varphi(k+1)}$

Posons :

$$B(k) = \sum_{j\in I_o} \rho_j^{\varphi(k+1)}[c(s_j^{\varphi(k+1)})-(x^{\Psi(k)}|a(s_j^{\varphi(k+1)})-z)]$$

et

$$\omega^* = \operatorname{Max}_{s\in S} |c(s)|$$

On a :

$$|B(k)| \leq \varepsilon(j)(\omega^* + 2 \operatorname{Max}_{t\in -a(S)\cup\{z\}} |(x^{\Psi(k)}|t)|)$$

L'élément z appartenant à l'intérieur du cône convexe engendré par a(S) il existe, d'après le lemme 2.3, une constante positive w telle que :

$$A \cup (-A) \subset w\, A \quad \text{avec} \quad A = \omega(-a(S) \cup \{z\})$$

On a alors :

$$\operatorname{Max}_{t\in A} |(x^{\Psi(k)}|t)| = \operatorname{Max}_{t\in A\cup(-A)} (x^{\Psi(k)}|t) \leq \operatorname{Max}_{t\in wA} (x^{\Psi(k)}|t)$$

où :

$$\operatorname{Max}_{t\in -a(S)\cup\{z\}} |(x^{\Psi(k)}|t)| \leq w. \operatorname{Max}_{t\in -a(S)\cup\{z\}} (x^{\Psi(k)}|t)$$

On a :

$$\underset{t\in -a(S)}{\text{Max}} \ (x^{\Psi(k)}|t) \leq \underset{s\in S}{\text{Max}}[c(s)-(x^{\Psi(k)}|a(s))]+ \omega^* = \bar{d}^{\Psi(k)}-d^{\Psi(k)}+\omega^*$$

et

$$(x^{\Psi(k)}|z) = d^{\Psi(k)} \leq \bar{d}^{\Psi(k)}-d^{\Psi(k)}+d^*$$

En effet $d^* = (x^*|z)$ est supérieur à $d^{\Psi(k)}$ (lemme 2.1)

On a donc :

$$\underset{t\in A}{\text{Max}} \ |(x^{\Psi(k)}|t)| \leq w(\bar{d}^{\Psi(k)}-d^{\Psi(k)}) + w \ \text{Max}(\omega^*,d^*)$$

et par suite :

$$|B(k)| \leq \varepsilon(k) \ [\omega^*+w\text{Max}(\omega^*,d^*) + w \ (\bar{d}^{\Psi(k)}-d^{\Psi(k)})]$$

En posant :

$$d' = \omega^* + w \ . \ \text{Max} \ (\omega^*,d^*) > 0$$

il vient :

$$d^{\wp(k+1)}+(\varepsilon(k)-1)d^{\Psi(k)}+\varepsilon(k)d'+\rho_{e(k)}^{\wp(k+1)}\eta^{\Psi(k)} \geq (\rho_{e(k)}^{\wp(k+1)}-w\varepsilon(k))(\bar{d}^{\Psi(k)}-d^{\Psi(k)})$$

L'indice $e(k)$ appartenant à I_1, on a :

$$0 < \mu \leq \rho_{e(k)}^{\wp(k+1)}$$

La suite $\{\bar{d}^{\Psi(k)}-d^{\Psi(k)}\}$ est majorée (pour k suffisamment grand) par la suite $\{\alpha_k\}$ avec :

$$\alpha_k = \frac{1}{\mu-w\varepsilon(k)} \ (d^{\wp(k+1)}+(\varepsilon(k)-1)d^{\Psi(k)}+ \varepsilon(k)d' + K\eta^{\Psi(k)})$$

La suite $\{\eta^k\}$ tendant vers zéro, la convergence de $\{d^k\}$ vers d et celle de $\varepsilon(k)$ vers zéro entraine :

$$\lim_{k\to\infty} \alpha_k = 0$$

et par suite :

$$\lim_{k\to\infty} (\bar{d}^{\Psi(k)}-d^{\Psi(k)}) = 0 \ .$$

On a toujours $d^k \leq \alpha$, en faisant un raisonnement analogue à celui de lemme 2.2 on a le résultat :

$$\lim_{k\to\infty} d^{\Psi(k)} = \alpha$$

$\{d^k\}$ étant croissante

$$\lim_{k\to\infty} d^k = \alpha$$

Q.E.D.

REMARQUE :

Dès que $\bar{d}^k - d^k = c(z^{k+1}) - (x^k | a(z^{k+1})) + \eta^k$ est inférieur à ε, l'élément x^k est solution du problème :

(P^k) $\quad d^k = \text{Min}\,[(x|z) | c(s) \leq (x|a(s)) + \varepsilon]$

Si ε est petit x^k sera donc près de l'ensemble

$$A = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n | (\bar{x}|z) = \alpha \text{ et } c(s) \leq (\bar{x}|a(s))\} \quad .$$

CHAPITRE III

PROGRAMMATION ET APPLICATIONS DE L'ALGORITHME D'ECHANGE DANS LE CAS OU IL EST ITERATIF

On décrit dans ce chapitre une méthode de programmation de l'algorithme d'échange (dans le cas "itératif") pour la résolution du problème :

$$(P) \qquad \alpha = \mathrm{Min}\,[\,< x,z > \,|\, c(s) \leq < x,a(s) > \quad \forall s \in S \quad x \in V + \tilde{x}\,]$$

avec V de dimension finie.

La méthode consiste à former une procédure d'échange indépendante des fonctions c et a ; cette procédure est ensuite utilisée pour la résolution de nombreux problèmes correspondants à des données particulières de c, a et du compact S.

Chaque exemple est décrit complètement, les procédures ALGOL W correspondantes figurent en annexe.

3.1. MINIMISATION DANS $\mathbb{R}^n$ D'UNE FONCTIONNELLE LINEAIRE SUR UNE INTERSECTION DE DEMI ESPACES.

On s'intéresse ici au cas où $V = \mathbb{R}^n$ et $\tilde{x} = 0$; c'est le problème du paragraphe 2.1 :

$$(P_1) \qquad \alpha = \mathrm{Min}\,[\,(x|z) \,|\, c(s) \leq (x|a(s)) \quad \forall s \in S\,]$$

où $(.|.)$ désigne le produit scalaire Euclidien sur $\mathbb{R}^n$.

PRATIQUE DE L'ECHANGE

Notons $u_j^k = (c(s_j^k), a(s_j^k))$ $(j=1,\ldots,n)$ les éléments de $\mathbb{R}^{n+1}$ appartenant à $j(S)$ dont on dispose à l'étape k et $e^{k+1} = (c(z^{k+1}), a(z^{k+1}))$ l'élément que l'on cherche à échanger avec un élément $u_{j_o}^k$ (on pose pour simplifier $j_o = j_o^k$) .

On a :

$$(1) \qquad \sum_{j=1}^{n} \rho_j^k u_j^k = (d^k, z) \quad \text{avec} \quad \rho_j^k > 0 \quad (j=1,\ldots,n)$$

Pour obtenir j_o on peut procéder de la façon suivante :

1) On résoud le système linéaire :

$$(2) \qquad \sum_{j=1}^{n} \omega_j a(s_j^k) = -a(z^{k+1}) .$$

En ajoutant la relation :

$$(3) \qquad \sum_{j=1}^{n} \rho_j^k a(s_j^k) = z$$

multipliée par $-\dfrac{\omega_{j_o}}{\rho_{j_o}^k}$ on obtient :

$$(4) \qquad a(z^{k+1}) + \sum_{j=1}^{n} \rho_j^k \left(\frac{\omega_j}{\rho_j^k} - \frac{\omega_{j_o}}{\rho_{j_o}^k} \right) a(s_j^k) = \left(- \frac{\omega_{j_o}}{\rho_{j_o}^k} \right) z$$

2) On détermine $j_o \in \{1,\ldots,n\}$ vérifiant :

$$\alpha_o = \frac{\omega_{j_o}}{\rho_{j_o}^k} = \min_{j=1,\ldots,n} \frac{\omega_j}{\rho_j^k}$$

LEMME 3.1 :

Le scalaire α_o est strictement négatif .

DEMONSTRATION :

Si α_o n'était pas strictement négatif, en multipliant l'équation (4) par $\frac{1}{\alpha_o}$ et en l'ajoutant à l'équation (3) on aurait :

$$0 = \sum_{j=1}^{n} \mu_j a(s_j^k) + \mu_{j_o} a(z^{k+1})$$

avec μ_j strictement positif et $\mu_{j_o} \geq 0$.

En multipliant scalairement par x^k on aurait :

$$\sum_{j=1}^{n} \mu_j c(s_j^k) + \mu_{j_o} c(z^{k+1}) = \bar{d}^k - d^k - \eta^k$$

L'hypothèse H1 entrainant par ailleurs :

$$0 = \sum_{j=1}^{n} \mu_j (x^* | a(s_j^k)) + \mu_{j_o} (x^* | a(z^{k+1})) > \sum_{j=1}^{n} \mu_j c(s_j^k) + \mu_{j_o} c(z^{k+1})$$

on aurait :

$$\bar{d}^k - d^k - \eta^k < 0$$

ce qui est absurde.

Q.E.D.

3) Le scalaire α_o étant strictement négatif, on peut poser :

$$\rho_j^{k+1} = \begin{cases} -\frac{1}{\alpha_o} \rho_j^k \left(\frac{\omega_j}{\rho_j^k} - \frac{\omega_{j_o}}{\rho_{j_o}^k} \right) , & j=1,\ldots,n \quad , \quad j \neq j_o \\ -\frac{1}{\alpha_o} , & j = j_o . \end{cases}$$

Par définition de j_o on a $\rho_j^{k+1} \geq 0$.

En posant :

$$u_j^{k+1} = \begin{cases} u_j^k & j=1,\ldots,n \quad j \neq j_o \\ e^{k+1} & j = j_o \end{cases}$$

on a :

$(d^{k+1}, z) = \sum_{j=1}^{n} \rho_j^{k+1} u_j^{k+1}$ et on suppose (algorithme itératif) $\rho_j^{k+1} > 0$ (j=1,..,

CONSTRUCTION DE VALEURS DE DEPART

Il peut être difficile de déterminer à priori des valeurs s_j^o de S et des coefficients ρ_j^o vérifiant, au départ :

$$z = \sum_{j=1}^{n} \rho_j^o a(s_j^o) \quad \text{avec} \quad \rho_j^o > 0 \quad j=1,\ldots,n \ .$$

Une méthode pour résoudre ce problème consiste à ajouter à j(S) n points $u_j^o = (c_j^o, a_j^o)$ de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ (j=1,...,n) tels que, si $\bar{x}$ est solution de P, $\bar{x}$ est aussi solution de :

$$(P') \qquad \alpha = \text{Min}\,[(x|z) \,|\, c(s) \leq (x|a(s)) \ \forall s \in S \ ; \ c_j^o < (x|a_j^o) \ ; \ j=1,\ldots,n]$$

On choisit les éléments a_j^o (j=1,...,n) de façon qu'ils vérifient :

$$z = \sum_{j=1}^{n} \rho_j^o a_j^o \quad \text{avec} \quad \rho_j^o > 0$$

et les éléments c_j^o j=1,...,n négatifs et de grande valeur absolue ; ainsi les n contraintes ne seront plus "actives" après un certain nombre d'itérations.

La détermination de u_j^o (j=1,...,n) peut se faire de la façon suivante :

1) détermination de l'indice i_o de {1,...,n} tel que, si on pose :

$$z = (z_1,\ldots,z_n)$$

on ait :

$$|z_{i_o}| = \underset{i=1,\ldots,n}{\text{Min}} |z_i|$$

2) On note $\varepsilon > 0$ la plus petite valeur autorisée pour ρ_j^o , et $u^o(i,j)$ la $i^{\text{ème}}$ composante du vecteur u_j^o .

On peut alors poser :

$$u^o(i_o,i_o) = \text{signe } z_{i_o} \ ; \ u^o(i,i_o) = 0 \quad i=1,\ldots,n \quad i \neq i_o \quad \text{et} \quad \rho_{i_o}^o = |z_{i_o}|$$

et :

a) Pour $j > i_o$:

- si $|z_j| > \varepsilon$ on pose

$u^o(j,j) = \text{signe } z_j$, $\rho_j^o = |z_j|$ et $u^o(i,j) = 0$ $i=1,\ldots,n$ $i\neq j$

- si $|z_j| \leq \varepsilon$ on pose :

$u^o(j,j-1) = 1$ $u^o(j,j) = -1$ $\rho_j^o = \rho_{j-1}^o - z_j$

$u^o(i,j) = 0$ $i=1,\ldots,n$ $i\neq j$.

b) Pour $j < i_o$:

- si $|z_j| > \varepsilon$ on pose

$u^o(j,j) = \text{signe } z_j$, $\rho_j^o = |z_j|$ et $u^o(i,j) = 0$ $i=1,\ldots,n$ $i\neq j$

- si $|z_j| \leq \varepsilon$ on pose

$u^o(j,j) = -1$ $u^o(j,j+1) = 1$ $\rho_j^o = \rho_{j+1}^o - z_j$

$u^o(i,j) = 0$ $i=1,\ldots,n$ $i\neq j$.

La valeur la plus petite atteinte par ρ_i^o sera :

$$m = |z_{i_o}| - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq j_o}}^{n} |z_j| \geq |z_{i_o}| - n\,\varepsilon$$

il faut donc avoir :

$$\varepsilon < |z_{i_o}| - n\,\varepsilon \quad \text{ou} \quad 0 < \varepsilon \leq \frac{|z_{i_o}|}{n+1}$$

CONSTRUCTION DU VECTEUR $e = (c(z^{k+1}), a(z^{k+1}))$

C'est la construction de ce vecteur qui fait intervenir explicitement les fonctions c, a et le compact S.

Pour chaque donnée de c, a et S on doit pouvoir construire l'application qui à x^k de $\mathbb{R}^n$ associe le vecteur $e = (c(z^{k+1}), a(z^{k+1}))$ et l'élément $\bar{i}^k$ tels que :

$$\bar{i}^k = c(z^{k+1}) - (x^k | a(z^{k+1})) = \max_{s\in S} [c(s) - (x^k | a(s))] .$$

La procédure APPUI jouera ce rôle dans les programmes.

En définitive, la tête de la procédure ALGOL W décrite en annexe aura la forme de :

```
PROCEDURE dchangeasrm (INTEGER VALUE n; REAL ARRAY z (*);
PROCEDURE appui; REAL VALUE prec; INTEGER VALUE itermax; REAL ARRAY x (*); REAL RESULT d;
LOGICAL RESULT itératif);
COMMENT
```

La procédure calcule dans $x = (x_1,\ldots,x_n)$ et dans d de $\mathbb{R}$ des valeurs approchant (respectivement) $\bar{x}$ et solutions du problème

$$\alpha = \text{Min}\,[(x\ z)|c(s) \leq (x|a(s)) \quad \forall s \in S] = (\bar{x}|z).$$

La valeur logique itératif prend la valeur FALSE si l'algorithme n'est pas itératif.
Le scalaire strictement positif PREC représente la précision que l'on désire atteindre, l'arrêt de l'algorithme se produisant sur des valeurs x et d telles que :

$$d = \text{Min}\,[(x|z)|c(s) \leq (x|a(s)) + \text{PREC} \quad \forall s \in S] = (x|z)$$

où lorsque l'on dépasse le nombre d'itérations ITERMAX > N.
La procédure APPUI a pour paramètres formels le vecteur $x = (x_1,\ldots,x_n)$, le vecteur $e = (e_o,e_1,\ldots,e_n)$ et le scalaire $\bar{i}$; elle calcule dans e et $\bar{i}$ les valeurs $e_o,\ldots,e_n$ et $\bar{i}$ telles que :

$$\bar{i} = e_o - (x|(e_1,\ldots,e_n)) = \max_{s\in S}\,[c(s)-(x|a(s))] \ ;$$

REMARQUE :

La structure générale d'un programme ALGOL W résolvant le problème

(P) $\quad \alpha = \text{Min}\,[(x|z)|c(s) \leq (x|a(s)) \quad \forall s \in S]$

sera :

```
PRØCEDURE résolutiondep (en paramètres formels n,z,c,a et S;
          précision dans PREC; résultats dans x et d; réponse à la question
          l'algorithme est itératif dans ITERATIF);
BEGIN CØMMENT définition de la procédure appui;
      PRØCEDURE appui ( REAL ARRAY x,e; REAL ib;
      BEGIN
        :
      END appui
      échangedsrn (n,z,appui,prec,itermax,x,d,itératif)
END résolution de p;
```

3.2. PROGRAMMATION LINEAIRE.

On a dans ce cas :

$S = \{1,\ldots,m\}$ avec $m > n$.

L'hypothèse H1 entraine qu'il n'y a aucune contrainte de type égalité, c'est-à-dire de la forme $c_j = (x|a_j)$.

Les itérations se terminent en un nombre fini d'étapes.
Il n'est pas utile d'avoir à chaque étape k l'élément z^{k+1} de S qui réalise le maximum de $c(i)-(x^k|a(i))$ on peut se contenter d'un élément z^{k+1} tel que

$$c(z^{k+1})-(x^k|a(z^{k+1})) > 0$$

REMARQUE :

Dans ce cas la proposition 1.2 donne pour le problème dual :

$$(Q) \qquad -\beta = \text{Max}\left[\sum_{i=1}^{k} \rho_i c_i \,\middle|\, 1 \leq k \leq n \quad \rho_i > 0 \quad \sum_{i=1}^{k} \rho_i a_i = z\right]$$

formule classique du dual d'un problème de programmation linéaire. Le choix à chaque étape de n points a_i de S correspond au choix d'une base dans la méthode du simplexe, l'échange représente alors une itération de l'algorithme du simplexe appliqué au problème "dual" :

$$(Q') \qquad -\beta = \text{Max}\left[(\rho|c) \,\middle|\, \rho \geq 0 \quad \sum_{i=1}^{m} \rho_i a_i = z\right]$$

en notant $\rho = (\rho_1,\ldots,\rho_m)$ $c = (c_1,\ldots,c_m)$.

Les coefficients ρ_i^k (i=1,...,n) successifs représentent les valeurs non nulles des points extrémaux du polyèdre :

$$P = \{\rho \in \mathbb{R}^m \mid \sum_{i=1}^{m} \rho_i a_i = z \quad \rho \geq 0\}$$

L'algorithme est itératif si aucune "dégénérescence" ne se produit dans l'algorithme du simplexe appliqué à (Q').

Appliqué au problème "dégénéré" :

$$\alpha = \text{Min}\,[-0,75x_1+20x_2-0,5x_3+6x_4 \mid x_3 \leq 1 \quad x_1,x_2,x_3,x_4 \geq 0$$
$$0,25x_1-8x_2-x_3+9x_4 \leq 0 \;;\; 0,5x_1-12x_2-0,5x_3+3x_4 \leq 0]$$

la procédure PROLINECH a donné en six échanges pour minimum -1,250028 la solution étant :

$$\bar{x} = (1,0,1,0) .$$

3.3. MINIMISATION SANS CONTRAINTE D'UNE FONCTION CONVEXE DERIVABLE.

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction convexe et dérivable sur $\mathbb{R}^n$. On suppose qu'il existe x^o dans $\mathbb{R}^n$ tel que l'ensemble $T = \{x \in \mathbb{R}^n \; f(x) \leq f(x^o)\}$ soit borné.
On cherche à résoudre le problème :

$$\alpha = \min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) = \text{Min}\,[f(x) \mid x \in T]$$

La fonction f étant dérivable, sur T on a :

$$f(x) = \max_{t \in T} [f(t)+(f'(t) \mid x-t)]$$

En posant

$$c(t) = f(t)-(f'(t) \mid t)$$
$$a(t) = -f'(t)$$

on a (voir chapitre 1) :

$$\alpha = \text{Min}\,[((x,d) \mid (0,1)) \mid c(t) \leq ((x,d) \mid (a(t),1)) \quad \forall t \in T] .$$

On aura donc dans ce cas :

$$S = T$$

et la fonction "appui" déterminera un élément e de $\mathbb{R}^{n+2}$ et un scalaire $\bar{i}$ tels que, pour un (x,d) de $\mathbb{R}^{n+1}$ donné, on ait :

$$e = (c(\bar{t}),a(\bar{t}),1) \quad \text{avec} \quad z \quad \text{tel que :}$$

$$\bar{i} = c(\bar{t})-((x,d)|(a(\bar{t}),1)) = \operatorname{Max}_{t\in T} [c(t)-((x,d)|(a(t),1))]$$

ou

$$c(\bar{t})-(x|a(\bar{t})) = \operatorname{Max}_{t\in T} [c(t)-(x|a(t))]$$

et

$$\bar{i} = c(\bar{t})-(x|a(\bar{t}))-d \ .$$

Soit :

$$f(\bar{t})+(f'(\bar{t})|x-\bar{t}) = \operatorname{Max}_{t\in T} [f(t)+(f'(t)|x-t)] = f(x)$$

d'où

$$\bar{t} = x$$

$$e = (f(x)-(f'(x)|x) \ , \ -f'(x),1) \quad \text{et} \quad \bar{i} = f(x)-d$$

(on posera dans le programme $x_{n+1} = d$).

REMARQUE :

La condition imposant à chaque étape l'appartenance de z = (0,1) à l'intérieur du cône convexe engendré par $a(s_j^k)$ (j=1,...,n) s'écrit dans ce cas :

$$(0,1) = \sum_{j=1}^{n+1} \rho_j^k (a(s_j^k),1)$$

soit

$$\sum_{j=1}^{n+1} \rho_j^k f'(t_j^k) = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{j=1}^{n+1} \rho_j^k = 1 \quad \rho_j^k > 0 \ .$$

Lorsque n = 1, l'algorithme peut être décrit de la façon suivante

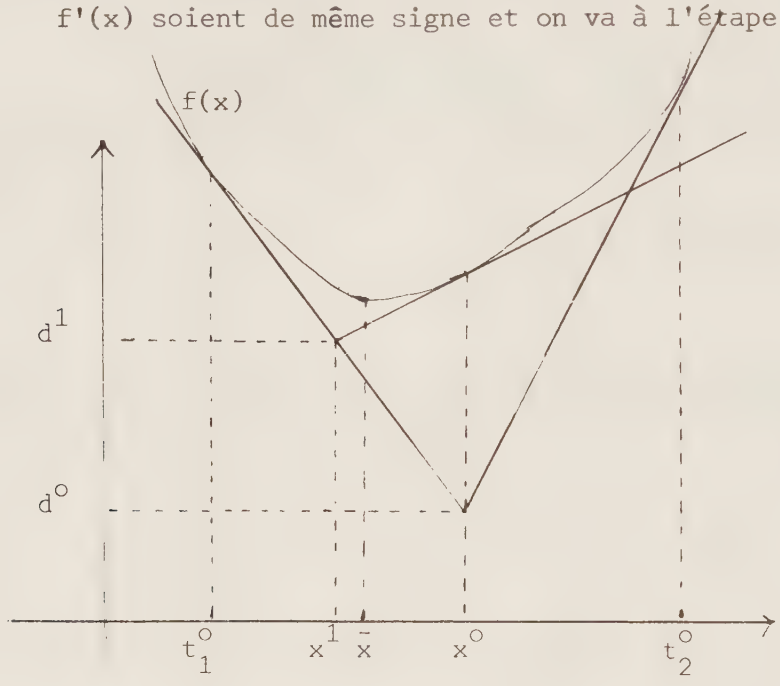
Etape 0 : on considère deux abscisses t_1 et t_2 telles que $f'(t_1)$ et $f'(t_2)$ soient de signe opposé.

Etape 1 : soit x l'abscisse et d l'ordonnée de l'intersection des deux droites tangentes à f en t_1 et t_2 .

Etape 2 : si $f(x)-d < \varepsilon$ on arrête sinon on va à l'étape 3.

Etape 3 : calculer f'(x).

Etape 4 : on échange x avec l'abscisse t_i (i=1 ou 2) telle que $f'(t_i)$ et f'(x) soient de même signe et on va à l'étape 1.



On peut faire une description géométrique analogue pour n quelconque.

La procédure correspondant à la méthode précédente est MINFCTCONV.

Appliquée à la minimisation de la fonction :

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4) = 100(x_2-x_1^2)^2 + (1-x_1)^2 + 90(x_4-x_3^2)^2 + (1-x_3)^2 + 10.1[(x_2-1)^2 + (x_4-1)^2] + 19.8(x_2-1)(x_4-1)$$

la procédure après 84 échanges, a donné pour **vecteur** solution :

$$\tilde{x} = (0.9973434,\ 0.9945696,\ 1.003249,\ 1.006322)$$

la solution exacte étant le vecteur :

$$\bar{x} = (1,1,1,1)$$

On a :

$$f(\tilde{x}) = 4.40 * 10^{-5} \quad \text{et} \quad f(\bar{x}) = 0$$

3.4. MINIMISATION D'UNE FONCTION CONVEXE DERIVABLE AVEC CONTRAINTES DERIVABLES.

On considère le problème :

(P) $\quad \alpha = \text{Min}\,[f_o(x) \mid f_i(x) \leq 0 \quad i=1,\ldots,p]$

où $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $i=0,\ldots,p$ sont des fonctions convexes dérivables. On suppose qu'il existe x^o dans $\mathbb{R}^n$ vérifiant $f_i(x^o) \leq 0$ $i=1,\ldots,p$ tel que

$$T = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f_o(x) \leq f_o(x^o) \quad \text{et} \quad f_i(x) \leq 0 \quad i=1,\ldots,p\}$$

est non vide et qu'il existe x^* de $\mathbb{R}^n$ tel que :

$$f_i(x^*) < 0 \quad i=1,\ldots,p\ .$$

Sur T la fonction f_o peut s'écrire :

$$f_o(x) = \underset{t\in T}{\text{Max}}\,[f_o(t)+(f_o'(t) \mid x-t)].$$

Le problème (P) s'écrit alors :

$$(P) \qquad \alpha = \text{Min}\,[((x,d)|(0,1))|f_i(x) \leq 0 \;\; i=1,\ldots,p;\; f_o(t)+(f_o'(t)|x-t) \leq d \quad \forall t \in T]$$

De même :

$$f_i(x) = \max_{t\in T}\,[f_i(t)+(f_i'(t)|x-t)] \quad i=1,\ldots,p$$

d'où :

$$\alpha = \text{Min}\,[((x,d)|(0,1))|f_i(t)+(f_i'(t)|x-t) \leq \eta_i \;\; i=0,\ldots,p \;\; \forall t \in T]$$

avec :

$$\eta_i = \begin{cases} d & \text{si} \quad i = 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On a aussi :

$$\alpha = \text{Min}\,[((x,d)|(0,1))|f_o(t)-(f_o'(t)|t) \leq ((x,d)|(-f_o'(t),1)) \;\; \forall t \in T$$
$$f_i(t)-(f_i'(t)|t) \leq ((x,d)|(-f_i'(t),0) \;\; \forall t \in T]$$

Posons :

$$S = \{0,\ldots,p\} \times T$$

Soit c l'application de S dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$c(i,t) = f_i(t)-(f_i'(t)|t)$$

et a l'application de S dans $\mathbb{R}^{n+1}$ définie par :

$$a(i,t) = -f_i'(t) \; .$$

En posant :

$$\delta_i = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i=0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

le problème (P) s'écrit :

$$\alpha = \text{Min}\,[((x,d)|(0,1))|(a(i,t)|(x,d)) \leq c(i,t) + \delta_i d \;\; \forall (i,t) \in S]$$

On retrouve la forme générale du problème du paragraphe 2.3.1. La fonction APPUI sera l'application qui, à un élément (x,d) de $\mathbb{R}^{n+1}$ associe l'élément e de $\mathbb{R}^{n+2}$ et $\bar{i}$ de $\mathbb{R}$ tels que :

$$e = (c(\bar{j},\bar{t}),a(\bar{j},\bar{t}),\delta_{\bar{j}})$$

avec $(\bar{j},\bar{t})$ défini par :

$$\bar{i} = c(\bar{j},\bar{t})-(x|a(\bar{j},\bar{t})-d\delta_{\bar{j}} = \underset{(j,t)\in S}{\text{Max}} [c(j,t)-(x|a(j,t))-d\delta_j]$$

soit :

$$\bar{i} = \underset{j=0,\ldots,p}{\text{Max}} \{\underset{t\in T}{\text{Max}} [f_j(t)+(f'_j(t)|x-t)]-d\delta_j\}$$

d'où $\bar{t} = x$ et

$$\bar{i} = \underset{j=0,\ldots,p}{\text{Max}} [f_j(x)-d\delta_j] = f_{\bar{j}}(x)-d\delta_{\bar{j}}$$

Par suite :

$$e = (f_{\bar{j}}(x)-(f'_{\bar{j}}(x)|x),-f'_{\bar{j}}(x),\delta_{\bar{j}})$$

La procédure correspondant à ce problème est MINCONTR.

Appliquée à la résolution du problème :

(P) $\quad \alpha = \text{Min} [x_1+x_2 | x_1^2-x_2 \leq 0 \text{ et } x_1 \geq 0]$

on obtient en six itérations :

$$\alpha = 0 \text{ et } \bar{x}_1 = \bar{x}_2 = 0 .$$

3.5. MINIMISATION D'UNE FONCTION CONVEXE SOUS DIFFERENTIABLE AVEC CONTRAINTES SOUS DIFFERENTIABLES.

On considère comme dans l'exemple 3 le problème :

$$(P) \qquad \alpha = \text{Min}\,[f_o(x) \,|\, f_j(x) \leq 0 \quad j=1,\ldots,p]$$

En supposant maintenant $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ convexe et sous différentiable ($\partial f_i(x) \neq \emptyset \ \forall x$) pour $i=0,\ldots,p$. L'exemple 3 est évidemment un cas particulier correspondant au cas $\partial f_i(x) = \{f_i'(x)\}$.
On suppose encore qu'il existe x_o dans $\mathbb{R}^n$ vérifiant $f_j(x^o) \leq 0 \quad j=1,\ldots,p$ tel que $T = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, f_o(x) \leq f_o(x^o); f_j(x) \leq 0 \quad j=1,\ldots,p\}$ est borné qu'il existe x^* tel que $f_j(x^*) < 0 \quad (j=1,\ldots,p)$.
On a pour x dans T :

$$f_j(x) = \underset{t \in T}{\text{Max}}\,[< x,t > - f_j^*(t)]$$

où f_j^* désigne la polaire de la fonction f_j

$$(f_j^*(t) = \underset{x \in \mathbb{R}^n}{\text{Sup}}\,[< x,t > - f(x)])$$

Le problème (P) peut donc s'écrire :

$$\alpha = \text{Min}\,[((x,d)\,|\,(0,1)) \,|\, -f_j^*(t) \leq ((x,d)\,|\,(-t,\delta_j)) \quad j=0,\ldots,p \quad t \in T$$

en posant :

$$c(j,t) = -f_j^*(t) \text{ et } a(j,t) = (-t,\delta_j) \qquad S = \{0,\ldots,p\} \times T$$

on retrouve la forme standard du paragraphe 2.1 dans $\mathbb{R}^{n+1}$.

La fonction APPUI fera correspondre dans ce cas le vecteur $e = (e_o, e_1, \ldots, e_n, e_{n+1})$ et $\bar{i}$ à partir de $(x,d) \in \mathbb{R}^n + \mathbb{R}$ avec :

$$e = (c(\bar{j},\bar{t}), -\bar{t}, \delta_{\bar{j}}) \quad \text{et} \quad (j,\bar{t}) \in S \quad \text{tel que :}$$

$$\bar{i} = c(\bar{j},\bar{t}) - ((x,d)\,|\,(-\bar{t},\delta_{\bar{j}})) = \underset{\substack{t \in T \\ j=0,\ldots,p}}{\text{Max}}\,[c(j,t) - ((x,d)\,|\,(-t,\delta_j))]$$

Soit :

$$\bar{i} = \max_{j=0,\ldots,p} \{-d\delta_j + \max_{t\in T} [(x\ t) - f_j^*(t)]\}$$

Mais

$$\max_{t\in T} [(x\ t) - f_j^*(t)] = (x|\bar{t}_j) - f_j^*(\bar{t}_j) = f_j(x)$$

avec

$$\bar{t}_j \in \partial f_j(x) .$$

D'où :

$$\bar{i} = \max_{j=0,\ldots,p} [f_j(x) - d\delta_j] = f_{\bar{j}}(x) - d\delta_{\bar{j}}$$

$$= -f_{\bar{j}}^*(\bar{t}_{\bar{j}}) - ((x,d)|(-\bar{t}_{\bar{j}}, \delta_{\bar{j}}))$$

Par suite :

$$e = (-f_{\bar{j}}^*(\bar{t}_{\bar{j}}), -\bar{t}_{\bar{j}}, \delta_{\bar{j}}) \quad \text{avec} \quad \bar{t}_{\bar{j}} \in \partial f_{\bar{j}}(x) .$$

On peut donner comme exemple de fonction convexe sous différentiable, une fonction qui est l'enveloppe supérieure de fonctions affines.

Nous traiterons ce cas plus directement dans l'exemple 6 suivant .

3.6. MINIMISATION DE L'ENVELOPPE SUPERIEURE DE FONCTIONS AFFINES SUR UN POLYEDRE

On considère le problème :

$$(P) \qquad \alpha = \operatorname{Min}\Big[\max_{i=1,\ldots,m} (c_i-(x|a_i)) \,\Big|\, c_i-(x\,a_i) \leq 0 \quad i=m+1,\ldots,p\Big]$$

où $(c_i,a_i) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ $i=1,\ldots,p$ sont donnés avec $n < p$.
Le problème (P) peut s'écrire :

$$\alpha = \operatorname{Min}\big[((x,d)|(0,1)) \,\big|\, c_i-(x|a_i) \leq \delta_{1,m}(i)d \quad i=1,\ldots,p\big]$$

avec

$$\delta_{1,m}(i) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i=1,\ldots,m \\ 0 & \text{si} \quad i=m+1,\ldots,p \end{cases}$$

où

$$\alpha = \operatorname{Min}\big[((x,d)|(0,1)) \,\big|\, c_i \leq ((x,d)|(a_i,\delta_{1,m}(i))) \quad i=1,\ldots,p\big]$$

On a un problème analogue à l'exemple 1.

Pour que (P) ait une solution, il faut (hypothèse H2) que (0,1) appartienne à l'intérieur du cône convexe engendré par $(a_i,\delta_{1,m}(i))$ $i=1,\ldots,p$ il doit donc exister des coefficients $\rho_{i_1},\ldots\rho_{i_n} > 0$ tels que :

$$0 = \rho_{i_1} a_{i_1} + \ldots + \rho_{i_n} a_{i_n}$$

et

$$1 = \sum_{\substack{j=1 \\ 1\leq i_j\leq m}} \rho_{i_j}$$

On suppose de plus (hypothèse H1) qu'il existe x^* dans $\mathbb{R}^n$ tel que

$$c_i - (x^*|a_i) < 0 \qquad i=m+1,\ldots,p$$

La fonction APPUI déterminera dans ce cas, à partir de x et de $d = x_{n+1}$ un élément $e = (e_o, e_1, \ldots, e_{n+1})$ et un scalaire $\bar{i}$ tels que :

$$\bar{i} = c_{\bar{j}} - ((x,d) | (a_{\bar{j}}, \delta_{1,m}(\bar{j})) = \max_{j=1,\ldots,p} [c_j - (x|a_j) - \delta_{1,m}(j)d]$$

et

$$e = (c_{\bar{j}}, a_{\bar{j}}, \delta_{1,m}(\bar{j})) .$$

REMARQUE :

Le nombre de points de $S = \{1,\ldots,m\}$ étant fini, la fonction APPUI peut se contenter de déterminer un élément $\bar{j}$ tel que $\bar{i}$ soit strictement positif. D'après le théorème 2.1 on aura convergence de l'algorithme d'échange.

Application numérique

$n = 4 \quad m = 5 \quad p = 10$

On prend pour coefficients :

J	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
C(J)	30	30	-3	-2	-1	30	30	30	-4	-3
A(1,J)	2	-4	1,5	4,3	-5,1	1	1	2	0	-1
A(2,J)	-6	0	3,2	3,8	0,32	2	-4	4	-1	5
A(3,J)	0	0	0,3	6,1	24	6	-6	3	-2	-3
A(4,J)	0	0	-4,5	-3,5	3,4	-4	0	2	-3	8

coefficients définissant la fonction à minimiser

coefficients définissant les contraintes

Le minimum obtenu en 8 échanges est 216,4242 ; il est atteint pour x = (36.10, 3.92, -1.60, 1.09).

Les contraintes 6, 7, 9 et 10^e étant actives.

3.7. MINIMISATION D'UNE FONCTION CONVEXE DIFFERENTIABLE SUR UN CONVEXE DEFINI PAR UNE INFINITE DE CONTRAINTES.

Soit f une fonction convexe différentiable de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, T un compact quelconque et g une application de $T \times \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que pour tout t l'application $x \mapsto g(t,x)$ est différentiable.
On considère le problème :

$$(P) \qquad \alpha = \text{Min}\,[f(x) \mid g(t,x) \leq 0 \quad \forall t \in T]$$

On suppose qu'il existe x^o dans $\mathbb{R}^n$ vérifiant $z(t,x^o) \leq 0 \quad \forall t \in T$ tel que $K = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \leq f(x^o)\ ;\ g(t,x_o) \leq 0 \quad \forall t \in T\}$ soit borné et qu'il existe x^* de $\mathbb{R}^n$ tel que $g(t,x^*) < 0 \quad \forall t \in T$. Ce problème peut aussi s'écrire sous la forme :

$$\alpha = \text{Min}\,[f(x) \mid g(t,x) \leq 0 \quad \forall t \in T \text{ et } x \in K]$$

ou

$$\alpha = \text{Min}\,[((x,d)\mid(0,1)) \mid f(x) \leq d \quad g(t,x) \leq 0 \quad \forall t \in T]$$

Sur K on a aussi :

$$f(x) = \max_{y \in K}\,[f(y) + (f'(y) \mid x-y)]$$

et

$$g(t,x) = \max_{y \in K}\,[g(t,y) + (g'_x(t,y) \mid x-y)]$$

ou $g'_x(t,y)$ désigne le gradient en y de la fonction $x \to g(t,x)$.
On a donc :

$$\alpha = \text{Min}\,[((x,d)\mid(0,1)) \mid f(y) - (f'(y)\mid y) \leq ((x,d)\mid(-f'(y),1)) \quad \forall y \in K$$

$$g(t,y) - (g'_x(t,y)\mid y) \leq ((x,d)\mid(-g'(t,y),0))$$
$$\forall (t,y) \in T \times K]$$

Si on note t^* un point n'appartenant pas à T,

$$g(t^*,x) \equiv f(x)$$

$$S = (T \cup \{t^*\}) \times K$$

Pour (t,y) dans S

$$c(t,y) = g(t,y)-(g'_x(t,y)|y)$$

$$a(t,y) = -g'(t,y) \quad ; \quad \delta_t = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad t = t^* \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

alors le problème (P) peut s'écrire :

$$(P) \qquad \alpha = \text{Min}\,[((x,d)|(0,1))|c(t,y) \leq ((x,d)|a(t,y),\delta_t) \quad \forall (t,y) \in S]$$

On retrouve dans $\mathbb{R}^{n+1}$ la forme standart du paragraphe 2.1.1.

La fonction APPUI sera l'application qui,à un élément (x,d) de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ (on posera dans le programme $x_{n+1} = d$),fait correspondre l'élément $e = (e_o,e_1,\ldots,e_{n+1})$ de $\mathbb{R}^{n+2}$ et le scalaire $\bar{i}$ tels que :

$$e = (c(\bar{t},\bar{y}),a(\bar{t},\bar{y}),\delta_{\bar{t}})$$

avec :

$$\bar{i} = c(\bar{t},\bar{y})-(x|a(\bar{t},\bar{y}))-d\delta_{\bar{t}} = \underset{(t,y)\in S}{\text{Max}}\,[c(t,y)-(x|a(t,y))-d\delta_t]$$

ou

$$\bar{i} = \underset{t\in T\cup\{t^*\}}{\text{Max}}\,[\underset{y\in K}{\text{Max}}\,(g(t,y)+(g'_x(t,y)|x-y)-d\delta_t]$$

$$= \underset{t\in T\cup\{t^*\}}{\text{Max}}\,[g(t,x)-d\delta_t] = \text{Max}\,[f(x)-d \; ; \; \underset{t\in T}{\text{Max}}\, g(t,x)]$$

Si $\bar{i} = f(x)-d$ on aura : $\bar{t} = t^*$ et $\bar{y} = x$ d'où :

$$e = (f(x)-(f'(x)|x),-f'(x),1)$$

Si $\bar{i} = \underset{t\in T}{\text{Max}}\, g(t,x) = g(\tilde{t},x)$ on aura $\bar{t} = \tilde{t}$ et $\bar{y} = x$ d'où :

$$e = (g(\tilde{t},x)-(g'_x(\tilde{t},x)|x),-g'_x(\tilde{t},x),0) \; .$$

APPLICATION :

Approximation dans un espace de hilbert d'une fonction vérifiant des contraintes données.

Soit : $u(t) = \sin t$

on veut approcher u par un polynome $p(t) = x_1+x_2t+x_3t^2+x_4t^3+x_5t^4$ de degré 4 vérifiant la contrainte :

$$\cos(t)-p'(t) \leq 0{,}02 \quad \text{sur} \quad [-\tfrac{\pi}{2}, +\tfrac{\pi}{2}]$$

Plus précisément, posons :

$$\|h\|^2 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} h^2(t)dt \quad ; \quad \langle u,v \rangle = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} u(t)v(t)dt$$

et $C = \{p \in P_4 \mid \cos t-p'(t) \leq 0{,}02 \quad t \in [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}]\}$

On cherche $\bar{p}$ dans C tel que :

$$\frac{1}{2}\beta^2 = \frac{1}{2}\|u-\bar{p}\|^2 = \operatorname*{Min}_{p\in C} \frac{1}{2}\|u-p\|^2$$

Si G désigne la matrice de Gram des fonctions $T_i(t) = t^{i-1}$ $i=1,\ldots,5)$ (matrice symétrique formée des produits scalaire $\langle T_i,T_j \rangle$ $i,j=1,\ldots,5)$ et $h = (\langle T_1,u \rangle,\ldots, \langle T_n,u \rangle) \in \mathbb{R}^n$

On a :

$$\tilde{f}(x) = \tilde{f}(x_1,\ldots,x_4) = \frac{1}{2}\|g - \sum_{i=1}^{5} x_iT_i\|^2$$

$$= \frac{1}{2}(x|Gx)-(x|h) + \frac{1}{2}\langle u,u \rangle$$

Le polynome $p(t) = \sum_{i=1}^{5} x_it^{i-1}$ appartient à C si

$$\cos t - \sum_{i=2}^{5} (i-1)x_it^{i-2} \leq 0{,}02 \qquad t \in [-\tfrac{\pi}{2}, +\tfrac{\pi}{2}]$$

ou ; en posant :

$$g(t,x) = \cos t - \sum_{i=2}^{5} (i-1)x_it^{i-2} - 0{,}02$$

on doit avoir :

$$g(t,x) \leq 0 \qquad \forall t \in [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}]$$

Posons :

$$f(x) = \tilde{f}(x) - \frac{1}{2} < u,u >$$

Le problème s'écrit alors :

$$\alpha = \frac{1}{2}(\beta^2 - < u,u >) = f(\bar{x}) = \text{Min}\left[f(x) \middle| g(t,x) \leq 0 \quad \forall t \in \left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2} \right] \right]$$

On a :

$$f'(x) = Gx - h$$

et

$$g'_x(t,x) = (0,-1,-2t,-3t^2,-4t^3) .$$

Avec

$$G = (a_{i_j}) \qquad a_{i_j} = \begin{cases} \dfrac{1}{(i+j-1)2^{i+j-2}} \; \pi^{i+j-1} & \text{si } i+j = 2,4,6,8,10 \\ 0 & \text{si } i+j = 3,5,7,9 \end{cases}$$

$$h_1 = 0 \qquad h_2 = 2$$

$$h_i = (i-1)\left(\frac{\pi}{2}\right)^{i-2}(1-(-1)^{i-1}) - (i-1)(i-2)h_{i-2} \qquad i = 3,4,5$$

D'où :

$$h_3 = 0 \qquad h_4 = \frac{3\pi^2}{2} - 12 \qquad h_5 = 0$$

Par suite :

$$f(x) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{5} x_i \sum_{\substack{j=1 \\ 1+j \text{ pair}}}^{5} a_{i_j} x_j - 2x_2 - \left(\frac{3\pi^2}{2} - 12\right)x_4$$

Après 208 échanges, la procédure MINFCTCONTRINF a donné le polynome :

$$\bar{P}(t) = -0,726 + 0.991\ t - 0,032\ t^2 - 0,137\ t^3 + 0,0065\ t^4$$

et on a $\frac{1}{2}\|\sin - \bar{P}\| = 1,32$.

On peut noter que, dans cet exemple (et d'une façon générale pour des normes d'espace de Hilbert) même si l'algorithme est itératif, les points $a(s_i^k)$ $(i=1,\ldots,5)$ ont tendance à converger vers un même point. Après un grand nombre d'itérations l'algorithme devient instable.

3.8. ALGORITHME DE MINIMISATION D'UNE FONCTIONNELLE LINEAIRE DANS UN CONVEXE D'UN TRANSLATE D'UN SOUS ESPACE VECTORIEL DE DIMENSION FINI.

Dans X espace vectoriel topologique localement convexe on considère le problème :

$$(P) \qquad \alpha = \mathrm{Inf}\,[< x,z > \,|\, x \in V+\tilde{x} \quad \text{et} \quad c(s) \leq < x,a(s) > \ \forall s \in S]$$

où V est un sous espace vectoriel de X de dimension p ; z et $\tilde{x}$ donnés ; c et a applications continues de S compact dans $\mathbb{R}$ et X.

On suppose, comme dans le chapitre 1, que sont vérifiées les hypothèses :

HO $\quad \alpha$ est fini

H1 $\quad$ il existe $x^* \in V+\tilde{x}$ tel que $c(s) < < x^*,a(s) > \ \forall s \in S$

H2 $\quad z' \in \mathrm{ir}\ \mathrm{cc}(a'(S))$ $\quad$ (Voir page I.11)

On a alors (proposition 1.2) :

$$(Q) \qquad \alpha = \langle \tilde{x}, z \rangle + \text{Max} \Big[\sum_{i=1}^{k} \rho_i c(s_i) - \langle \tilde{x}, \sum_{i=1}^{k} \rho_i a(s_i) \rangle \Big|$$

$$1 \leq k \leq p \; ; \; \rho_i > 0 \; ; \; s_i \in S \; ; \; \sum_{i=1}^{k} \rho_i a(s_i) \in V^o + z \Big]$$

On résoudra le problème (P) selon la méthode décrite en 2.2 par les équations (1) à (6).

3.8.1. PRATIQUE DE L'ECHANGE.

Notons $u_j^k = (c(s_j^k), a(s_j^k))$ $(j=1,\ldots,p)$ les éléments de $\mathbb{R} \times X$ appartenant à $j(S)$ dont on dispose à l'étape k .

On a (équation (1) de 2.2) :

$$\sum_{j=1}^{k} \rho_j^k a(s_j^k) \in V^o + z$$

Soit :

$$e^{k+1} = (c(z^{k+1}), a(z^{k+1}))$$

l'élément que l'on cherche à échanger avec un élément $u_{j_o}^k$.

Pour obtenir $j_o \in \{1,\ldots,p\}$, on peut procéder de la façon suivante :

1) on résoud l'équation :

$$(7) \qquad \sum_{j=1}^{p} \omega_j a(s_j^k) + a(z^{k+1}) \in V^o$$

en ajoutant la relation :

$$- \frac{\omega_{j_o}}{\rho_{j_o}^k} \Big(\sum_{j=1}^{p} \rho_j^k a(s_j^k) - z \Big) \in V^o$$

on obtient :

$$a(z^{k+1}) + \sum_{j=1}^{p} \rho_j^k \Big(\frac{\omega_j}{\rho_j^k} - \frac{\omega_{j_o}}{\rho_{j_o}^k} \Big) a(s_j^k) + \frac{\omega_{j_o}}{\rho_{j_o}^k} \in V^o \; .$$

2) On détermine $j_o \in \{1,\ldots,n\}$ vérifiant :

$$\alpha_o = \frac{\omega_{j_o}}{\rho^k_{j_o}} = \min_{j=1,\ldots,p} \frac{\omega_j}{\rho^k_j}$$

En appliquant le lemme 3.1 au problème de minimisation mis sous la forme de la proposition 2.1 on a :

α_o strictement négatif.

---

3) On pose :

$$\rho^{k+1}_j = \begin{cases} -\frac{1}{\alpha_o}\rho^k_j\left(\frac{\omega_j}{\rho^k_j} - \frac{\omega_{j_o}}{\rho^k_{j_o}}\right) = \left(\rho^k_j - \frac{\omega_j}{\alpha_o}\right) & j=1,\ldots,p \quad j\neq j_o \\ -\frac{1}{\alpha_o} & \text{si} \quad j=j_o \end{cases}$$

On a alors $\rho^{k+1}_j \geq 0$

et

$$u^{k+1}_j = \begin{cases} u^k_j & j=1,\ldots,p \quad j\neq j_o \\ e^{k+1} & j=j_o \end{cases}$$

3.8.2. CONSTRUCTION DE VALEURS DE DEPART.

Il est en général difficile de trouver directement des valeurs s^o_j $(j=1,\ldots,p)$ de S et des coefficients $\rho^o_j > 0$ tels que :

$$\sum_{j=1}^{p} \rho^o_j a(s^o_j) \in V^o + z$$

Afin d'éviter cette difficulté, on ajoute à l'ensemble des contraintes :

$$c(s) \leq < x, a(s) > \quad \forall s \in S$$

p contraintes définies par les éléments (c_j, a_j) de $\mathbb{R} \times X$

$$c_j \leq < x, a_j > \quad j=1,\ldots,p \ .$$

On choisit ces contraintes de façon que :

i) la solution du problème (P) n'est pas altérée :

$$\alpha = \mathrm{Inf}\,[\, < x,z > \,|\, x \in V+\tilde{x} \;;\; c(s) \leq < x,a(s) > \;\forall s \in S \;\text{ et }\; c_j \leq < x,a_j > \quad j=1,\ldots,n]$$

ii) on puisse construire des coefficients $\rho_j^o > 0$ tels que :

$$\sum_{j=1}^{p} \rho_j^o a_j \in V^o+z \;.$$

Nous indiquons un algorithme de construction de valeurs de départ directement inspiré de l'algorithme décrit dans le paragraphe 3.1. Lorsque $X = \mathbb{R}^n$ et lorsque l'on ne connait explicitement qu'une base $v_{p+1},\ldots,v_n$ de V^o (cas le plus courant) un autre algorithme est utilisé (voir paragraphe 3.9).

On note $v_1,v_2,\ldots,v_p$ une base de V.

1) On détermine l'indice i_o de $\{1,\ldots,p\}$ tel que :

$$|< v_{i_o},z >| = \underset{i=1,\ldots,p}{\mathrm{Max}} |< v_i,z >|$$

2) on détermine a_{i_o} dans X vérifiant :

$$< v_{i_o},a_{i_o} > = \mathrm{signe} < v_{i_o},z > \qquad < v_i,a_{i_o} > = 0 \quad i=1,\ldots,p \quad i\neq i_o$$

et on pose $\rho_{i_o}^o = |< v_{i_o},z >|$.

Si ε désigne la plus petite valeur autorisée pour ρ_j^o (ε représente en fait la précision de l'ordinateur utilisé) on pose :

a) pour $j > i_o$

- si $|< v_j,z >| > \varepsilon$:

On détermine a_j dans X vérifiant

$$< v_j,a_j > = \mathrm{signe} < v_j,z >$$

et

$$< v_i,a_j > = 0 \quad i=1,\ldots,p \quad i\neq j \;.$$

On pose $\rho_j^o = |< v_j, z >|$

- si $|< v_j, z >| \leq \varepsilon$

a_j est solution de :

$$< v_j, a_j > = -1 \quad \text{et} \quad < v_i, a_j > = 0 \quad i=1,\ldots,p \quad i \neq j$$

l'élément a_{j-1} est modifié de façon que sa composante sur v_j soit :

$$< v_j, a_{j-1} > = 1$$

les autres composantes étant inchangées.

On pose :

$$\rho_j^o = \rho_{j-1}^o - < v_j, z >$$

b) pour $j < i_o$

- si $|< v_j, z >| > \varepsilon$

On détermine a_j comme solution de :

$$< v_j, a_j > = \text{signe} < v_j, z > \quad \text{et} \quad < v_i, a_j > = 0 \quad i=1,\ldots,p \quad i \neq j$$

On pose :

$$\rho_j^o = |< v_j, z >|$$

- si $|< v_j, z >| < \varepsilon$

On détermine a_j comme solution de :

$$< v_j, a_j > = -1 \quad < v_i, a_j > = 0 \quad i=1,\ldots,p \quad i \neq j$$

On modifie a_{j+1} de façon que sa composante sur v_j soit :

$$< v_j, a_{j+1} > = 1$$

On pose :

$$\rho_j^o = \rho_{j+1}^o - < v_j, z > \quad .$$

La valeur la plus petite atteinte par $\overset{o}{j}$ sera :

$$m = |< v_{i_o}, z >| - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq j_o}}^{p} |< v_j, z >| \geq |< v_{i_o}, z >| - n\,\varepsilon$$

on doit donc avoir :

$$0 < \varepsilon \leq \frac{|< v_{i_o}, z >|}{p+1}$$

Les éléments c_j sont pris de façon à ne pas vérifier les contraintes à l'optimum ; on prend pour cela c_j négatif et de grande valeur absolue.

REMARQUE :

On peut chercher les éléments a_j $(j=1,\ldots,p)$ dans V ; ils s'expriment alors sous la forme :

$$a_j = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i^j v_i \quad (\alpha_i^j \in \mathbb{R})$$

Les éléments α_i^j $(i=1,\ldots,p)$ étant solution d'un système linéaire de la forme :

$$G\,\alpha^j = \pm\, e^j$$

avec G matrice de Gram formé des éléments $< v_i, v_j >$ et
$e^j = (0,\ldots,0,1,0,\ldots,0)$ avec $e_j^j = 1$.

3.9. APPLICATION A LA MINIMISATION D'UNE FONCTIONNELLE DANS UN CONVEXE D'UN TRANSLATE D'UN SOUS ESPACE VECTORIEL DE $\mathbb{R}^n$.

Dans le cas où $X = \mathbb{R}^n$, le problème (P) du paragraphe 3.8 s'écrit :

$$(P) \qquad \alpha = \mathrm{Inf}\,[(x|z)| \quad x \in V + \tilde{x} \quad \text{et} \quad c(s) \leq (x|a(s)) \quad \forall s \in S]$$

avec V de dimension p engendré par $v_1,\ldots,v_p$.

L'espace V^o est alors de dimension n-p et engendré par les éléments $v_{p+1},\ldots,v_n$ de $\mathbb{R}^n$.

On ne suppose connus que les éléments $v_{p+1},\ldots,v_n$.

La construction des valeurs de départ peut se faire suivant une méthode analogue à celle exposée dans le paragraphe 3.1.
On construit ainsi des éléments $\rho_j^o > 0 \quad (j=1,\ldots,p)$ et une matrice U à p colonnes et n lignes telle que :

$$(1) \qquad \sum_{j=1}^{p} \rho_j^o \; U(*,j) = z$$

où $U(*,j)$ représente la $j^{ème}$ colonne de la matrice U.

On détermine d'abord les p premières lignes de U et les éléments ρ_j^o $(j=1,\ldots,p)$ on complète ensuite une colonne $U(*,i_o)$ de U de façon à vérifier l'équation (1).
On pose alors :

$U(*,j) = a_j \quad j=1,\ldots,p$ et on a :

$$\sum_{j=1}^{p} \rho_j^o a_j + \sum_{j=p+1}^{n} \rho_j^o v_j = z \quad \text{avec} \quad \rho_j^o = 0 \quad j=p+1,\ldots,n$$

L'élément x^k de $V+\tilde{x}$ vérifiant :

$$c(s_j^k) = (x^k | a(s_j^k)) \quad j=1,\ldots,p$$

sera solution du système linéaire :

$$(x^k | a(s_j^k)) = c(s_j^k) \qquad j=1,\ldots,p$$

$$(x^k | v_j) \quad = (\tilde{x} | v_j) \qquad j=P+1,\ldots,n$$

de n équations à n inconnues.

L'échange entre le vecteur $(c(z^{k+1}),a(z^{k+1}))$ de $\mathbb{R}^{n+1}$ et un élément de $U(*,j_o) = (c(s^k_{j_o^k}))$ (voir équations (5) et (6) de 2.2.) pourra s'opérer de la façon suivante :

On résoud le système linéaire :

$$\sum_{j=1}^{p} \omega_j a(s_j^k) + \sum_{j=p+1}^{n} \omega_j v_j = -a(z^{k+1})$$

on ajoute l'équation :

$$\sum_{j=1}^{p} \rho_j^k a(s_j^k) + \sum_{j=p+1}^{n} \rho_j^k v_j = z \quad \text{multipliée par} \; - \frac{\omega_{j_o}}{\rho^k_{j_o}} = - \alpha_o \; .$$

On obtient :

$$\frac{1}{\alpha_o} a(z^{k+1}) + \sum_{j=1}^{p} \rho_j^k - \frac{1}{\alpha_o}\left(\frac{\omega_j}{\rho_j^k} - \frac{\omega_{j_o}}{\rho_{j_o}^k}\right) a(s_j^k) + \sum_{j=p+1}^{n} \rho_j^k \frac{1}{o}\left(\frac{\omega_j}{\rho_j^k} - \frac{\omega_{j_o}}{\rho_{j_o}^k}\right) v_j = z$$

On détermine j_o dans $\{1,\ldots,p\}$ tel que :

$$\alpha_o = \frac{\omega_{j_o}}{\rho_{j_o}^k} = \min_{j=1,\ldots,p} \frac{\omega_j}{\rho_j^k}$$

l'hypothèse H1 étant vérifiée on a $\alpha_o > 0$.

On pose alors :

$$\rho_j^{k+1} = \begin{cases} \rho_j^k - \dfrac{\omega_j}{\alpha_o} & j=1,\ldots,n \quad j \neq j_o \\ \\ -\dfrac{1}{\alpha_o} & j = j_o \end{cases}$$

et

$$(c(s_j^{k+1}), a(s_j^{k+1})) = \begin{cases} (c(s_j^k), a(s_j^k)) & \text{pour } j=1,\ldots,p \quad j \neq j_o \\ \\ (c(z^{k+1}), a(z^{k+1})) & \text{si } j = j_o \end{cases}$$

Le choix de j_o entraîne :

$$\sum_{j=1}^{p} \rho_j^{k+1} a(s_j^{k+1}) + \sum_{j=p+1}^{n} \rho_j^{k+1} v_j = z$$

où

$$\sum_{j=1}^{p} \rho_j^{k+1} a(s_j^{k+1}) \in V^o + z$$

avec $\rho_j^{k+1} \geq 0$.

On suppose (<u>algorithme "itératif"</u>) que $\rho_j^{k+1} > 0$.

La tête de la procédure (algol W) de l'algorithme d'échange permettant de résoudre le problème (P) :

$$(P) \qquad \alpha = \mathrm{Inf}\,[(x|z)|\ x \in V+\tilde{x} \ \text{ et } \ c(s) \leq (x\ a(s)) \quad \forall s \in S]$$

avec x dans $\mathbb{R}^n$, V de dimension p, V^o engendré par $v_{p+1},\ldots,v_n$ s'écrit

```
PROCEDURE echtransdern (INTEGER VALUE n,p; REAL ARRAY vo(*,*);
REAL ARRAY z, xt(*); PROCEDURE appui; REAL VALUE prec;
INTEGER VALUE itermax; REAL ARRAY x(*); REAL RESULT d;
LOGICAL RESULT iteratif);
```

COMMENT la procédure calcule dans D avec la précision PREC et dans X(1),...,X(N) la solution du problème (P). L'élément $\tilde{x}$ est représenté par XT(1),...,XT(N) et la base v_j de V^o par : VØ(*,P+1),...,VØ(*,N). La procédure APPUI (X,E,IB) calcule dans E(0),...,E(N) et dans IB les valeurs telles que :

$$IB = E(0) - \sum_{j=1}^{n} X(j).E(j) = \max_{s\in S} [c(s)-(x|a(s))] \ .$$

itermax indique le maximum d'itérations autorisées dans la méthode d'échange. La valeur logique itératif prend la valeur TRUE si aucun des ρ_j^k (j=1,...,n) n'est inférieur à 10^{-7} ; l'algorithme est alors itératif. Si l'hypothèse H2 n'est pas vérifiée, un ordre d'écriture l'indique.

La résolution de (P) pour des fonctions c et a particulières aura la structure générale (voir paragraphe 3.1).

```
PROCEDURE resolutiondep (INTEGER VALUE n,p; REAL ARRAY
vo(*,*); REAL ARRAY z,xt(*); spécification de s, c et a;
REAL VALUE prec; REAL ARRAY x(*); REAL RESULT d; LOGICAL RESULT itératif);
COMMENT cette procédure résoud le problème (P);
BEGIN   PROCEDURE appui (REAL ARRAY x,e(*); REAL RESULT ib);
        COMMENT définition de la procédure "appui" utilisée dans
                echtransdern à partir de s, c et a;
        BEGIN
          :
        END appui;
        echtransdern (n,p,vø,z,xt,appui,prec, nombre défini suivant le
        problème, x,d,itératif)
```

3.10. EXEMPLES

3.10.1. PROGRAMMATION LINEAIRE AVEC CONTRAINTES DE TYPE EGALITE ET DE TYPE INEGALITE.

On considère le problème :

(P) $\alpha = \text{Min}\,[(x|z)\,|\,(x|b_i) = f_i \quad i=1,\ldots,q \;;\; c_i \leq (x|a_i) \;\; i=1,\ldots,m]$

Le sous espace vectoriel V est alors l'orthogonal au sous espace vectoriel engendré par $b_1,\ldots,b_q$; ces éléments forment donc une base de V°. On détermine un élément $\tilde{x}$ de $\mathbb{R}^n$ en posant $x_i = 0$ $(i=q+1,\ldots,n)$ et en résolvant le système linéaire

$$\sum_{j=1}^{q} b_i^j \tilde{x}_j = f_i \qquad i=1,\ldots,q$$

avec $b_i = (b_i^1,\ldots,b_i^n)$.

La procédure appui sera la même que celle définie en 3.2.
La tête de la procédure résolvant le problème est :

```
PROCEDURE prolin (INTEGER VALUE n,q,m; REAL ARRAY a,b(*,*);
REAL ARRAY c,f,z(*); REAL VALUE prec; REAL ARRAY x(*);
REAL RESULT d, LOGICAL RESULT iteratif);
COMMENT la procédure calcule par la méthode d'échange le minimum D de
(X|Z) pour X vérifiant les contraintes de type inégalité :
```

$$\sum_{j=1}^{n} A(i,j)\, X(j) \leq C(i) \quad (i=1,\ldots,M)$$

et les contraintes de type égalité :

$$\sum_{j=1}^{n} B(i,j)\, X(j) = F(I) \quad (i=1,\ldots,Q) \;;$$

3.10.2. MINIMISATION D'UNE FONCTION CONVEXE DE n VARIABLES DANS UN CONVEXE D'UN SOUS ESPACE VECTORIEL.

On considère le problème :

$$(P) \qquad \alpha = \mathrm{Inf}\,[f_o(x) \mid f_i(x) \leq 0 \;\; i=1,\ldots p \;\; (x|b_i) = g_i \;\; i=1,\ldots,q]$$

où $q < n$. On suppose qu'il existe x^o vérifiant $(x^o|b_i) = g_i \;\; i=1,\ldots,q$ et $f_i(x^o) \leq 0 \;\; i=1,\ldots,p$ tel que l'ensemble

$$T = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \leq f_o(x^o) \;\; ; \;\; f_i(x) \leq d \;\; i=1,\ldots,p \;\; ; \;\; (x|b_i)=g_i \;\; i=1,\ldots,q\}$$

soit borné ; et qu'il existe x^* de $\mathbb{R}^n$ tel que $f_i(x^*) < 0 \;\; i=1,\ldots,p$ et $(x^*|b_i) = g_i \;\; i=1,\ldots,q$.

Les $f_i \;\; (i=0,\ldots,p)$ sont des fonctions convexes dérivables de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$.

Les fonctions f_i peuvent s'écrire sur T :

$$f_i(x) = \sup_{t \in K} [f_i(t)+(f_i'(t)|x-t)] \qquad i=0,\ldots,p \; .$$

On a alors (P) qui s'écrit :

$$\alpha = \mathrm{Inf}\,[((x,d)|(0,1)) \;\; f_i(t)+(f_i'(t)|x-t) \leq \eta_i \qquad i=0,\ldots,p \;\; \forall t \in T]$$
$$(x|b_i) = f_i \qquad i=1,\ldots,q$$

avec $$\eta_i = \begin{cases} d & \text{si} \quad i=0 \\ 0 & \text{sinon} \; . \end{cases}$$

En définissant comme en 3.4 les applications c et a de $S = \{0,1,\ldots,p\} \times T$ dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^n$ par :

$$c(i,t) = f_i(t) - (f_i'(t)|t)$$

$$a(i,t) = (-f_i'(t), S_i)$$

avec $$\delta_i = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i=0 \\ 0 & \text{sinon} \; . \end{cases}$$

On a :

$$\alpha = \mathrm{Inf}\,[((x,d)|(0,1))|c(s) \leq ((x,d)|a(s))\ \forall s \in S \text{ et } (x|b_i) = f_i \quad i=1,\ldots,q]$$

Si on note $\tilde{x}$ un élément de $\mathbb{R}^n$ vérifiant :

$$(\tilde{x}|b_j) = g_j \qquad j=1,\ldots,q$$

$$W = \{x \in \mathbb{R}^n | (x\ b_i) = 0\}\ i=1,\ldots,q \quad \text{et} \quad V = W \times \mathbb{R}$$

on a :

$$\alpha = \mathrm{Inf}\,[((x,d)|(0,1))|(x,d) \in V+(\tilde{x},0)c(s) \leq ((x,d)|(a(s))\ \forall s \in S]$$

qui est sous la forme générale de 3.9.

L'hypothèse

H1 Il existe x^* vérifiant $(x^*|b_i) = g_i \quad i=1,\ldots,q$ tel que :

$$f_i(x^*) < 0 \qquad i=1,\ldots,p$$

est alors équivalente à :

" Il existe (x^*,d^*) de $V+(\tilde{x},0)$ tel que

$c(s) < ((x^*,d^*)|a(s))\ \forall s \in S$.

Les éléments $(b_i,0)$ $i=1,\ldots,q$ engendrent le sous espace V^o .

La procédure APPUI est la même qu'en 3.4.

CHAPITRE 4

ETUDE GEOMETRIQUE DE LA RECHERCHE D'UN MEILLEUR APPROXIMANT DANS UN ESPACE VECTORIEL NORME

Soit E un espace vectoriel normé, et V un sous espace vectoriel de E de dimension finie. On s'intéresse à la construction d'un élément $\bar{g}$ de V tel que :

(P) $\quad \alpha = \|f-\bar{g}\| = \text{Min}\,[\|f-g\| \mid g \in V]$

A partir d'une interprétation géométrique, on caractérise l'ensemble des éléments $\bar{g}$ de V vérifiant (P). On étudie la structure de l'ensemble des meilleurs approximants de f dans V. On donne ensuite des théorèmes de caractérisation pour différents espaces vectoriel normés. On caractérise enfin l'élément $\bar{g}$ meilleur approximant de f dans V avec des contraintes du type $c(r) \leq < x,a(r) >$ pour r parcourant un compact.

4.1. - CARACTERISATION GEOMATRIQUE D'UN MEILLEUR APPROXIMANT.

Soit E un espace vectoriel normé et E' son dual topologique. On muni E' de la topologie faible $\sigma(E',E)$. On note $\|g\|$ la norme d'un élément g de E et S' la boule unité de E' munie de la topologie forte définie par la norme :

$$|||t||| = \text{Sup}\,[< x,t > \mid \|x\| = 1]$$

$$S' = \{t \in E' \mid |||t||| \leq 1\}$$

(On note $< x,t >$ la valeur de la fonctionnelle t en x).

On sait (théorème de Banach-Alaoglu) que S' est faiblement compacte.

Soit V un sous espace vectoriel de E de dimension n engendré par les éléments $f_1,\ldots,f_n$. Soit f un élément n'appartenant pas à V.

On pose :

(P) $\quad \alpha = \underset{g\in V}{\text{Min}} \|f-g\|$

et $\quad M = \{g \in V \mid \|f-g\| = \alpha\}$.

L'ensemble M est l'ensemble des meilleurs approximants de f dans V.

On note c l'application de S' dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$c : \quad t \mapsto < f,t >$$

et a l'application de S' dans $\mathbb{R}^n$ définie par :

$$a : \quad t \mapsto (< f_1,t > ,\ldots, < f_n,t >)$$

et Γ' l'ensemble de $\mathbb{R}^{n+1}$ image de S' par l'application

$$j : \quad t \mapsto (c(t),a(t)) .$$

Dans l'espace $\mathbb{R}^{n+1}$ on note D la droite engendrée par l'élément $e_o = (1,0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ et D^+ la demi droite positive.

On a le lemme suivant caractérisant géométriquement la quantité $\|f-g\|$ pour un élément g de V.

LEMME 4.1 :

La quantité $\|f - \sum_{i=1}^{n} x_i f_i\|$, avec $x = (x_1,\ldots,x_n)$ élément de $\mathbb{R}^n$, représente l'intersection avec D^+ de l'hyperplan $\bar{H}_x$ de $\mathbb{R}^{n+1}$ orthogonal à (1,-x) et d'appui à Γ' .

DEMONSTRATION :

On a :

$$\bar{H}_x = \{y \in \mathbb{R}^{n+1} \mid ([1,-x]|y) = \operatorname*{Max}_{y\in\Gamma'} ([1,-x]|y)\}$$

(Notons que c et a étant faiblement continues et S' étant faiblement compact, Γ' est compact et $\bar{H}_x$ est non vide).

Par ailleurs :

$$\operatorname*{Max}_{y\in\Gamma'} ([1,-x]|y) = \operatorname*{Max}_{t\in S'} [c(t)-(x|a(t))]$$

$$= \operatorname*{Max}_{t\in S'} [< f - \sum_{i=1}^{n} x_i f_i, t >]$$

$$= \| f - \sum_{i=1}^{n} x_i f_i \| .$$

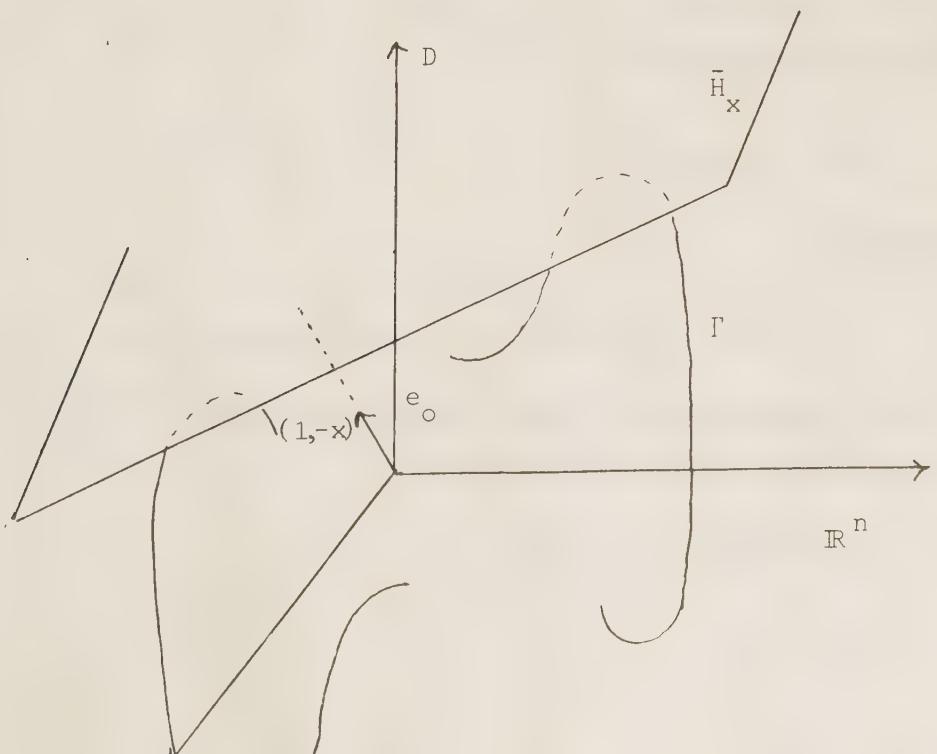
L'élément $\bar{i}\, e_o$ de D^+ $(\bar{i} > o)$ appartenant à $\bar{H}_x$ est tel que :

$$([1,-x]|\bar{i}\, e_o) = \| f - \sum_{i=1}^{n} x_i f_i \|$$

soit

$$\bar{i} = \| f - \sum_{i=1}^{n} x_i f_i \| .$$

Q.E.D.



DEFINITION

On note $A(\Gamma')$ l'ensemble des hyperplans d'appui à $\Gamma' = j(S')$ ayant un point commun avec $D^+ = \{y \in \mathbb{R}^{n+1} | y = \lambda e_o \text{ avec } \lambda \geq 0\}$.

Si H est dans $A(\Gamma')$ on note $i_H\, e_o$ son intersection avec D^+ .

REMARQUE :

Un hyperplan d'appui à Γ' ne peut contenir la droite D. En effet, si l'hyperplan $H = \{X \in \mathbb{R}^{n+1} | ([\alpha,x]|X) = 0\}$ contient D et est d'appui à Γ' on a :

$$\alpha = 0$$

et

$$\sum_{i=1}^{n} x_i\, a(t) \leq 0 \quad \text{pour tout } t \text{ de } S'$$

Mais, a(S') étant symétrique dans $\mathbb{R}^n$ (car S' est équilibrée), on a :

$$\sum_{i=1}^{n} x_i\, a(t) = \sum_{i=1}^{n} x_i < f_i, t > = 0 \quad \text{pour tout } t \text{ dans } S'$$

soit :

$$\sum_{i=1}^{n} x_i f_i = 0$$

ce qui est impossible car, par hypothèse, les éléments $f_1,\ldots,f_n$ sont linéairement indépendants.

On a la proposition :

PROPOSITION 4.2 :

Une condition nécessaire et suffisante pour que $\sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i f_i$ soit un meilleur approximant de f dans V est que l'hyperplan $\bar{H}$ de $A(\Gamma')$ orthogonal à $(1,-\bar{x}_1,\ldots,-\bar{x}_n)$ soit tel que :

$$i_{\bar{H}} = \text{Min}\, \{i_H | H \in A(\Gamma')\}$$

On a de plus :

$$\alpha = i_{\bar{H}} \quad .$$

DEMONSTRATION :

A tout hyperplan H de $A(\Gamma')$ on peut associer un élément x de $\mathbb{R}^n$ tel que (1,-x) soit orthogonal à H. D'après le lemme 4.1 on a alors

$$i_H = \|f - \sum_{i=1}^{n} x_i f_i\|$$

Par suite :

$$\alpha = \|f - \sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i\| = \operatorname{Min}_{x \in \mathbb{R}^n} \|f - \sum_{i=1}^{n} x_i f_i\|$$

Q.E.D.

D'après la proposition 4.2, la recherche d'un meilleur approximant de f se ramène à la recherche dans $\mathbb{R}^{n+1}$ d'un hyperplan d'appui à $\Gamma' = j(S')$ coupant la demi droite D^+ "le plus près possible de zéro" .

L'ensemble des meilleurs approximants M s'identifie alors à l'ensemble des hyperplans d'appui à Γ' coupant D^+ en αe_o .

On note $E(S')$ l'ensemble des points extrémaux de S' (ce sont les points qui ne sont pas combinaison convexe de deux autres points de S').

On a alors le lemme :

LEMME 4.2 :

On a :

$$A(\Gamma') = A(\Gamma) \quad \text{avec} \quad \Gamma = j(E(S'))$$

et

$$j(t) = (< f,t > , < f_1,t > , \ldots , < f_n,t >)$$

DEMONSTRATION :

On a :

$$\|f - \sum_{i=1}^{n} x_i f_i\| = \operatorname{Max}_{t \in E(S')} < f - \sum_{i=1}^{n} x_i f_i , t >$$

et par suite, si $H_x = \{y \in \mathbb{R}^{n+1} | ((1,-x)|y) = \|f - \sum_{i=1}^{n} x_i f_i\|\}$

est un hyperplan de $A(\Gamma')$, on a :

$$H_x = \{y \in \mathbb{R}^{n+1} | ([1,-x]|y) = \max_{t \in E(S')} ((1,-x)|(c(t),a(t)))\}$$

où :

$$H_x = \{y \in \mathbb{R}^{n+1} | ([1,-x]|y) = \max_{y \in \Gamma} ([1,-x]|y)\} ,$$

donc H_x est aussi dans $A(\Gamma)$ et réciproquement.

Q.E.D.

Le lemme précédent nous permet de réduire l'ensemble des hyperplans permettant de caractériser l'ensemble M des meilleurs approximants.

4.2. - STRUCTURE GEOMETRIQUE DE L'ENSEMBLE DES MEILLEURS APPROXIMANTS.

La proposition 4.2 nous permet de voir que, si l'ensemble M est toujours un convexe fermé borné, il peut avoir toutes les "formes" possibles. Par exemple, si l'on considère l'espace E = C(I) des fonctions continues sur un intervalle I fermé borné muni de la norme :

$$\|g\| = \max_{t \in I} |g(t)| ,$$

l'ensemble M peut être :

$$M = \{g \in V | g = x_1 f_1 + x_2 f_2 , x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$$

Il suffit de considérer l'approximation sur l'intervalle $[0,2\pi+1]$ de la fonction :

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \in [0,2\pi] \\ x-2\pi & \text{si } t \in [2\pi,2\pi+1] \end{cases}$$

par un élément du sous espace vectoriel engendré par :

$$f_1(x) = \begin{cases} \sin x & \text{si} \quad x \in [0,2\pi] \\ 0 & \text{si} \quad x \in [2\pi,2\pi+1] \end{cases}$$

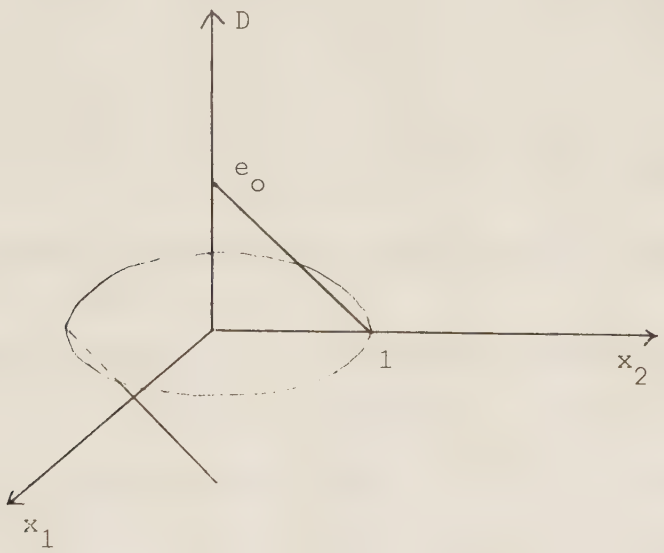
et

$$f_2(x) = \begin{cases} \cos x & \text{si} \quad x \in [0,2\pi] \\ -x+2\pi+1 & \text{si} \quad x \in [2\pi,2\pi+1] \end{cases}$$

Les fonctionnelles extrémales de S' étant de la forme :

$f \mapsto \varepsilon f(t)$ avec $(\varepsilon,t) \in \{-1,+1\} \times I$

(Dunford et Schwartz p. 441), l'ensemble Γ de $\mathbb{R}^3$ est formé par la courbe gauche de la figure ci-dessous :



On a donc :

$\alpha = 1$

et l'ensemble des (x_1,x_2) tels que $x_1f_1 + x_2f_2$ soit dans M est le cercle de centre zéro et de rayon 1.

Les formules de dualité du chapitre 1 nous permettent de caractériser les hyperplans H de $A(\Gamma)$ de direction $(1,-x)$ tels que

$\sum_{i=1}^{n} x_i f_i$ soit un meilleur approximant de f .

PROPOSITION 4.3 :

Une condition nécessaire et suffisante pour que $\sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i f_i$ soit un meilleur approximant de f est que l'intersection $i_{\bar{H}}\, e_o$ de l'hyperplan de $A(\Gamma)$ orthogonal à $(1,-\bar{x}_1,\ldots,-\bar{x}_n)$ avec D^+ appartienne à l'enveloppe convexe fermée de k points ($k \leq n+1$) de $\bar{H} \cap \Gamma$. On a alors $i_{\bar{H}} = \alpha$.

DEMONSTRATION :

On a :

$$\alpha = \operatorname{Min}_{g \in V} \|f-g\|$$

où

$$\alpha = \operatorname{Min}_{g \in V} \operatorname{Sup}_{t \in S'} < f-g,t >$$

(P) $$\alpha = \operatorname{Min} [\, < [x,d],[0,1] > \mid c(t) \leq < [x,d],[a(t),1] >,\ \forall t \in S']$$

En appliquant la proposition 1.3, l'élément $[\bar{x},\bar{d}]$ sera solution de (P), si et seulement s'il existe $(\bar{r},\bar{\ell}_1,\bar{\ell}_2)$ de

$cc(j(S') \times \{1\}) \cap \mathbb{R} \times \{0\} \times \{1\}$ tel que :

$$\bar{r} = ([\bar{x},\bar{d}]\ [\bar{\ell}_1,\bar{\ell}_2]) .$$

On a alors $\bar{d} = \alpha$.

Posons $\bar{r} = \sum_{i=1}^{m} \rho_i c(t_i)$; $\bar{\ell}_i = \sum_{i=1}^{m} \rho_i a(t_i) = 0$; $\bar{\ell}_2 = \sum_{i=1}^{m} \rho_i = 1$ $\rho_i > 0$.

L'élément $[\bar{r},\bar{\ell}_1]$ appartenant au convexe engendré par j(S') et à l'hyperplan $\bar{\ell}_1 = 0$ peut s'écrire :

$$(\bar{r},\bar{\ell}_1) = \sum_{i=1}^{k} \rho_i(c(t_i),a(t_i)) \quad \text{avec} \quad k \leq n+1 \quad \text{et} \quad \bar{\ell}_1 = 0 \quad t_i \in E(S')$$

(On applique le théorème de Caractheodory (Eggleston [28]), le fait qu'un convexe compact de $\mathbb{R}^{n+1}$ est l'enveloppe convexe de ses points extrémaux et que $E(j(S')) \subset j(E(S'))$.

Par construction on a $\bar{d} = \|f - \sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i f_i\|$ et, d'après le lemme 4.1, $\bar{d} = i_{\bar{H}}$.

On a donc :

$$(1) \qquad \sum_{i=1}^{k} \rho_i([1,-\bar{x}]|[c(t_i),a(t_i)]) = i_{\bar{H}} e_o \qquad t_i \in E(S') \quad \sum_{i=1}^{k} \rho_i = 1$$

L'hyperplan $\bar{H}$ orthogonal à $(1,-\bar{x})$ a pour équation :

$$\bar{H} = \{y \in \mathbb{R}^{n+1} | ([1,-\bar{x}]|y) = i_{\bar{H}}\} \quad ;$$

étant d'appui à $\Gamma = j(E(S'))$ on a :

$$([1,-\bar{x}]|[c(t_i),a(t_i)]) \leq i_{\bar{H}} \qquad i=1,\ldots,k \ .$$

La relation (1) entraine qu'on a l'égalité, donc les éléments $(c(t_i),a(t_i))$ appartiennent à $\bar{H} \cap \Gamma$.

Q.E.D.

PROPOSITION 4.4 : (P.J. LAURENT [41]) .

Une condition nécessaire et suffisante pour que $\bar{g} = \sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i f_i$ soit un meilleur approximant de f dans V est qu'il existe k ($k \leq n+1$) fonctionnelles extrémales t_i de la boule unité du dual fort de E et k coefficients $\rho_i > 0$ (avec $\sum_{i=1}^{n} \rho_i = 1$) tels que :

1) $\quad < f-\bar{g},t_i > = \|f-\bar{g}\| \qquad i=1,\ldots,k$

2) $\quad \sum_{i=1}^{n} \rho_i(< f,t_i >, < f_1,t_i >, \ldots, < f_n,t_i >) = (\|f-\bar{g}\|,0,\ldots,0)$.

DEMONSTRATION :

On applique la proposition 4.3 ; le plan $\bar{H}$ appartenant à $A(\Gamma)$ a pour équation :

$$\bar{H} = \{y \in \mathbb{R}^{n+1} \mid ([1,-\bar{x}] \mid y) = \|f-\bar{g}\|\}$$

Les points de Γ étant de la forme $j(t) = (< f,t > , < f_1,t > ,\ldots, < f_n,t >)$ avec t extrémal de S', les k points de $\bar{H} \cap \Gamma$ vérifient :

$$< f,t_i > - < \sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i f_i,t_i > = \|f-\bar{g}\| \qquad i=1,\ldots,k .$$

L'appartenance de $i_{\bar{H}}\, e_o$ à l'enveloppe convexe de ces k points s'écrit alors :

$$\sum_{i=1}^{n} \rho_i(< f,t_i >, < f_1,t_i >,\ldots,< f_n,t_i >) = i_{\bar{H}}\, e_o = \|f-\bar{g}\| e_o .$$

Q.E.D.

REMARQUE :

La relation 1 et l'égalité $\sum_{j=1}^{n} \rho_j < f_i,t_j > = 0 \qquad i=1,\ldots,n$ entrainent directement l'égalité :

$$\sum_{i=1}^{n} \rho_i < f,t_i > = \|f-\bar{g}\| .$$

REMARQUE :

Prenons $E = C([0,1])$ muni de la norme du max.
Si on note f la fonction à approcher par une élément du sous espace vectoriel V engendré par $f_1,\ldots,f_n$, et Ψ l'application de $\{-1,+1\} \times [0,1]^*$ dans $\mathbb{R}^{n+1}$ définie par :

$$(\varepsilon,t) \mapsto \varepsilon(f(t),f_1(t),\ldots,f_n(t))$$

on a :

$$\Gamma = j(E(S')) = \Psi(\{-1,+1\} \times [0,1]) .$$

L'ensemble Γ est alors une courbe gauche symétrique dans $\mathbb{R}^{n+1}$.
Si H est un hyperplan d'appui à Γ orthogonal à $(1,-x)$, on a :

$$H = \{y \in \mathbb{R}^{n+1} \mid ([1,-x] \mid y) = \|f - \sum_{i=1}^{n} x_i f_i\|\}$$

Les points de contact de H avec Γ sont les points de la forme :

$$\varepsilon_i(f(t_i),f_1(t_i),\ldots,f_n(t_i)) \quad \text{avec} \quad (\varepsilon_i,t_i) \quad \text{dans} \quad \{-1,+1\} \times [0,1]$$

vérifiant :

$$\varepsilon_i(f(t_i)-g(t_i)) = \|f-g\| \quad \text{en posant} \quad g = \sum_{i=1}^{n} x_i f_i$$

c'est ce que certains auteurs appellent les "points critiques".

En appliquant la proposition 4.2, g sera un meilleur approximant de f dans V si il existe k $(k \leq n+1)$ coefficients $\rho_i > 0$ (avec $\sum_{i=1}^{k} \rho_i = 1$) , k éléments (ε_i,t_i) de $\{-1,+1\} \times [0,1]$ tels que :

1) $\varepsilon_i(t(t_i)-g(t_i)) = \|f-g\|$, $i=1,\ldots,k$.

2) $\sum_{i=1}^{k} \rho_i \varepsilon_i(f(t_i),f_1(t_i),\ldots,f_n(t_i)) = (\|f-g\|,0,\ldots,0)$.

On retrouve la généralisation classique du théorème de caractérisation de Tchebycheff (cf. P.J. LAURENT [38]).

On dit que V vérifie <u>la condition de Haar</u> si tout élément de V s'annule au plus n-1 fois sur $[0,1]$. Géométriquement cette condition revient à dire que toute demi droite passant par zéro dans $\mathbb{R}^n$ a au plus un point de contact (compté avec son ordre de multiplicité) avec la courbe gauche $\{y \in \mathbb{R}^n \mid y = (f_1(t),\ldots,f_n(t)) \ , \ t \in [0,1]\}$.

Si la condition de Haar est vérifiée, le théorème de caractérisation fait intervenir <u>exactement</u> n+1 points (ε_i,t_i) (c'est-à-dire $k = n+1$) (P.J. LAURENT [41] p. 94). L'élément $\sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i f_i$ meilleur approximant

de f est alors tel que l'hyperplan $\bar{H}$ d'appui à Γ qui est orthogonal à $(1,-\bar{x}_1,\ldots,-\bar{x}_n)$ a au moins n+1 points de contact avec Γ (ou n+1 points critiques de $[0,1]$). Il existe alors qu'un seul hyperplan de $A(\Gamma)$ qui coupe D^+ en α ; l'ensemble M des meilleurs approximants est réduit à un seul élément, on a unicité.

On peut se poser la question inverse ; existe-t-il des fonctions $f,f_1,\ldots,f_n$ de $C[0,1]$ telles que f admette un seul meilleur approximant $\bar{g}$ dans le sous espace vectoriel V engendré par $f_1,\ldots,f_n$, l'erreur $f-\bar{g}$ ayant moins de n+1 points critiques ?

L'interprétation géométrique du paragraphe 4.1 nous permet de répondre affirmativement à cette question.

Il suffit de construire des fonctions $f,f_1,\ldots,f_n$ telles que la "courbe" Γ de $\mathbb{R}^{n+1}$ qui leur est associée admette un seul hyperplan d'appui coupant D^+ en $\alpha\, e_o$ et ayant moins de n+1 points de contact avec Γ .

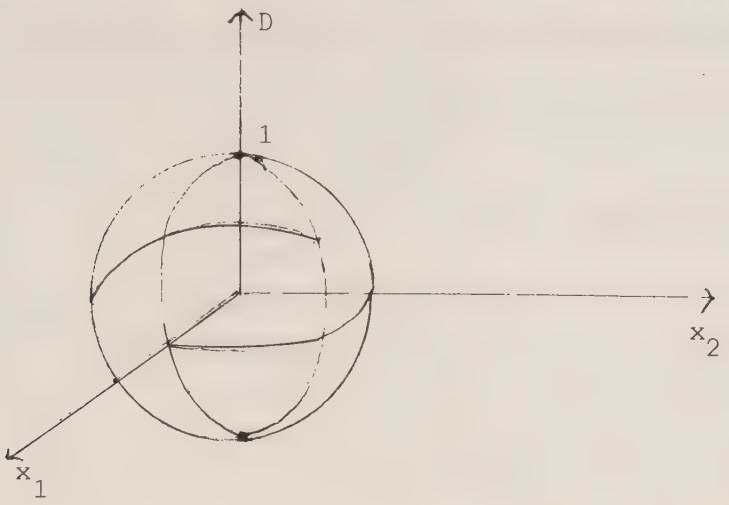
Par exemple, pour n = 2 , en prenant :

$$f(t) = \begin{cases} [1-(1-8t)^2]^{\frac{1}{2}} & \text{si} \quad t \in [0,\tfrac{1}{4}] \\ 0 & \text{si} \quad t \in [\tfrac{1}{4},\tfrac{3}{4}] \\ [1-(8t-7)]^{\frac{1}{2}} & \text{si} \quad t \in [\tfrac{3}{4},1] \end{cases}$$

$$f_1(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t \in [0,\tfrac{1}{4}] \\ \sin(-\pi t + \tfrac{3\pi}{4}) & \text{si} \quad t \in [\tfrac{1}{4},\tfrac{3}{4}] \\ -8t+7 & \text{si} \quad t \in [\tfrac{3}{4},1] \end{cases}$$

$$f_2(t) = \begin{cases} -8t+1 & \text{si} \quad t \in [0,\tfrac{1}{4}] \\ \sin(-\pi t + \tfrac{5\pi}{4}) & \text{si} \quad t \in [\tfrac{1}{4},\tfrac{3}{4}] \\ 0 & \text{si} \quad t \in [\tfrac{3}{4},1] \end{cases}$$

la courbe Γ a l'allure suivante :



On voit immédiatement que :

$$1 = \alpha = \text{Min}\,[\|f - x_1 f_1 - x_2 f_2\| \,|\, (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2] \quad .$$

Il existe un seul hyperplan de $A(\Gamma)$ qui coupe D en e_o, cet hyperplan de direction (1,0,0) a un seul point de contact avec Γ . L'ensemble M des meilleurs approximants est réduit à l'élément 0 les points t_i critiques pour l'erreur, ($|f(t_i)| = 1$) sont $\{\frac{1}{8}, \frac{7}{8}\}$.

4.3. - EXEMPLES DE THEOREMES DE CARACTERISATION.

Nous allons caractériser l'ensemble des points extrémaux de S' pour certains espaces vectoriels normés. On pourra alors donner une forme plus précise à la proposition 4.2.

4.3.1. APPROXIMATION DANS C(Q;B).

Soit B un espace de Banach dont la norme est notée $\| \ \|$.
On note C(Q;B) l'espace des fonctions continues f définies sur le compact Q et à valeurs dans B. On muni C(Q;B) de la norme

$$|||f||| = \text{Max} \left[\|f(q)\| \mid q \in Q \right] .$$

On a la proposition suivante (SINGER [60] p. 197) :

PROPOSITION 4.5 :

Les fonctionnelles extrémales de la boule unité du dual fort de C(T;B) sont de la forme :

$$f \mapsto \ < t, f(q) >$$

où t est une fonctionnelle extrémale de la boule unité U' de B' dual fort de B et q est un point de Q.

Etant données n+1 applications $f, f_1, \ldots, f_n$ linéairement indépendantes de C(Q;B) on cherche un élément

$\bar{g} = \sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i f_i$ tel que :

$$(P) \qquad \alpha = |||f - \sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i f_i||| = \text{Min} \left[||| f - \sum_{i=1}^{n} x_i f_i ||| \mid (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \right]$$

L'élément $\bar{g}$ est un meilleur approximant de f.

On a alors la proposition :

PROPOSITION 4.6 :

Une condition nécessaire et suffisante pour que $\bar{g} = \sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i f_i$ soit un meilleur approximant de f est qu'il existe k ($k \leq n+1$) éléments (t_i,q_i) de $E(U') \times Q$ et k coefficients $\rho_i > 0$ (avec $\sum_{i=1}^{k} \rho_i = 1$) tels que :

1) $< t_i, f(q_i)-\bar{g}(q_i) > = |||f-\bar{g}|||$ $\quad i=1,\ldots,k$.

2) $\sum_{i=1}^{k} \rho_i (< t_i,f(q_i) >, < t_i,f_1(q_i) >, \ldots, < t_i,f_n(q_i) >)$

$= (|||f-\bar{g}|||, 0, \ldots, 0)$.

DEMONSTRATION :

On applique la proposition 4.4 en remarquant que, d'après la proposition 5.4, les fonctionnelles extrémales de la boule unité de C(Q;B) peuvent s'identifier à $E(U') \times Q$.

Q.E.D.

APPLICATIONS :

On peut donner de nombreuses applications de la proposition précédente pour l'approximation de fonctions.

Si B = $\mathbb{R}$ l'espace $C(Q;\mathbb{R})$ est l'espace C(Q) des fonctionnelles continues sur Q munies de la norme :

$$\|f\| = \operatorname{Max}_{q \in Q} |f(q)|$$

La boule unité U' du dual fort de $\mathbb{R}$ est l'ensemble des fonctionnelles de la forme : $s \mapsto as$ avec $|a| \leq 1$.

Les fonctionnelles extrémales de U' sont de la forme :

$t : s \mapsto \varepsilon s$ avec $|\varepsilon| = 1$.

Les fonctionnelles extrémales de C(Q) sont donc de la forme :

$f \to \varepsilon f(q)$ avec $|\varepsilon| = 1$ et q dans Q (voir DUNFORD et SCHWARTZ

L'application de la proposition 4.6 nous donne le théorème de caractérisation de Tchebycheff généralisé.

4.3.2. APPROXIMATION AU SENS DU "MAX" DANS C'(Q).

Supposons que l'on veuille approcher une fonction f dans $C^1(Q)$ (espace des fonctions sur Q (compact) ayant une dérivée première continue) muni de la norme :

$$\|f\| = \text{Max}\left[\underset{q\in Q}{\text{Max}}\ |f(q)|\ ;\ \underset{q\in Q}{\text{Max}}\ |f'(q)|\right]$$

Dans $C(\{0,1\}\ ;B)$ avec $B = C(Q)$ notons F l'application :

$$i \mapsto F(i) = \begin{cases} f & \text{si} \quad i = 0 \\ f' & \text{si} \quad i = 1 \end{cases}$$

et F_j les applications :

$$i \mapsto F_j(i) = \begin{cases} f_j & \text{si} \quad i = 0 \\ f_j' & \text{si} \quad i = 1 \end{cases}$$

où $f, f_1, \ldots, f_n$ sont n+1 fonctions de $C^1(Q)$ linéairement indépendantes.

La recherche d'un meilleur approximant de f par un élément $\bar{g} = \sum_{j=1}^{n} \bar{x}_j f_j$ du sous espace vectoriel V engendré par $f_1, \ldots, f_n$ dans $C^1(Q)$ revient à rechercher, dans $C(\{0,1\}\ ;B)$, un meilleur approximant de F de la forme $\sum_{j=1}^{n} \bar{x}_j F_j$.

On a en effet :

$$\left|\left|\left| F - \sum_{j=1}^{n} \bar{x}_j F_j \right|\right|\right| = \underset{x\in \mathbb{R}^n}{\text{Min}} \left|\left|\left| F - \sum_{j=1}^{n} x_j F_j \right|\right|\right|$$

avec :

$$\left|\left|\left| F - \sum_{j=1}^{n} x_j F_j \right|\right|\right| = \underset{i\in\{0,1\}}{\text{Max}} \left[\left\| f^{(i)} - \sum_{j=1}^{n} x_j f_j^{(i)} \right\|_{C(Q)}\right]$$

où, en posant $g = \sum_{j=1}^{n} x_j f_j$ et $G = \sum_{j=1}^{n} x_j F_j$

$$\|F-G\| = \text{Max}\left[\|f-g\|_{C(Q)} ; \|f'-g'\|_{C(Q)}\right] = \|f-g\|$$

En appliquant la proposition 4.6 on obtient le théorème de caractérisation : (LAURENT [41]) :

PROPOSITION 4.7 :

Une condition nécessaire et suffisante pour que $\bar{g} = \sum_{j=1}^{n} \bar{x}_j f_j$ soit un meilleur approximant de f dans V est qu'il existe k $(k \leq n+1)$ éléments : $(\varepsilon_i, q_i, r_i)$ de $\{-1,+1\} \times Q \times \{0,1\}$ et k coefficients $\rho_i > 0$ (avec $\sum_{i=1}^{k} \rho_i = 1$) tels que :

1) $$\varepsilon_i (f^{(r_i)}(q_i) - \bar{g}^{(r_i)}(q_i)) = \|f-\bar{g}\|_{C'(Q)}$$

2) $$\sum_{i=1}^{k} \rho_i (\varepsilon_i f^{(r_i)}(q_i), \varepsilon_i f_1^{(r_i)}(q_i), \ldots, \varepsilon_i f_n^{(r_i)}(q_i)) =$$

$$(\|f-\bar{g}\|_{C^1(Q)}, 0, \ldots, 0).$$

4.3.3. APPROXIMATION GLOBALE D'UN ENSEMBLE COMPACT

Soit Q un ensemble compact d'éléments d'un espace de Banach B (dont lanorme est notée $\| \ \|$). On désire approcher "globalement" l'ensemble des éléments de Q par un élément du sous espace vectoriel V engendré par les éléments $f_1, \ldots, f_n$ de B. Plus précisément, on cherche un élément $\bar{g} = \sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i f_i$ tel que :

(P) $$\alpha = \text{Max}_{q \in Q} \|\bar{g}-q\| = \text{Min}_{g \in V} \text{Max}_{q \in Q} \|g-q\|$$

$\bar{g}$ est appelé un meilleur approximant global de l'ensemble Q dans V. (Voir Laurent et Pham Dinh Tuan [43]).

Le problème (P) revient à approcher dans C(Q;B) la fonction identité I de Q dans B : I(q) = q par un élément du sous espace vectoriel engendré par les n applications constantes F_j de Q dans B : $F_j(q) = f_j$ (j=1,...,n) au sens de la norme :

$$|||H||| = \underset{q\in Q}{\text{Max}} \|H(q)\|$$

On a en effet (M. BENAMARA [5]) :

$$\alpha = \underset{q\in Q}{\text{Max}} \|q - \sum_{j=1}^{n} \bar{x}_j f_j\| = \underset{x\in \mathbb{R}^n}{\text{Min}} |||I - \sum_{j=1}^{n} x_j F_j|||$$

En appliquant la proposition 4.6 on a le théorème de caractérisation :

PROPOSITION 4.8 :

Une condition nécessaire et suffisante pour que $\bar{g} = \sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i f_i$ soit un meilleur approximant de Q dans V est qu'il existe k ($k \leq n+1$) éléments (t_i,q_i) de $E(U') \times Q$ (U' boule unité du dual fort de B) et k coefficients $\rho_i > 0$ (avec $\sum_{i=1}^{k} \rho_i = 1$) telsque :

1) $$< t_i,q_i - \sum_{j=1}^{n} \bar{x}_j f_j > = \underset{q\in Q}{\text{Max}} \|q - \sum_{j=1}^{n} \bar{x}_j f_j\| = B \qquad i=1,...,n .$$

2) $$\sum_{i=1}^{k} \rho_i (< t_i,q_i > , < t_i,f_i > ,..., < t_i,f_n >) = (B,0,...,0) .$$

4.3.4. APPROXIMATION PARTICULIERE DANS C'(Q)

On cherche a approcher unefonction f dans $C^1(Q)$ muni de la norme :

$$\|h\| = \underset{q\in Q}{\text{Max}} \sqrt{h^2(q) + h'^2(q)} ,$$

par un élément du sous espace vectoriel V engendré par les éléments $f_1,...,f_n$ de C (Q).

Cette approximation revient à approcher, dans $C(Q;\mathbb{R}^2)$ la fonction $F : q \mapsto (f(q),f'(q))$ par un élément du sous espace vectoriel engendré par les fonctions :

$$F_j : q \mapsto (f_j(q),f_j'(q))$$

l'espace $\mathbb{R}^2$ étant muni de la métrique euclidienne. La norme de $C(Q;\mathbb{R}^2)$ est :

$$|||G||| = \operatorname{Max}_{q\in Q} \|G(q)\|_{\mathbb{R}^2}$$

Les fonctionnelles extrémales de la boule unité du dual fort de $\mathbb{R}^2$ sont de la forme :

$$(x_1,x_2) \mapsto \alpha x_1+\beta x_2 \quad \text{avec} \quad \sqrt{\alpha^2+\beta^2} = 1$$

On a alors, en appliquant la proposition 4.6, la caractérisation suivante :

PROPOSITION 4.9 :

Une condition nécessaire et suffisante pour que $\bar{g} = \sum_{j=1}^{n} x_j f_j$ soit un meilleur approximant de f au moindres carrés dans $V \subset C^1(Q)$ est qu'il existe k $(k \leq n+1)$ éléments (α_i,β_i,q_i) de $[-1,+1]^2 \times Q$ (avec $\sqrt{\alpha_i^2+\beta_i^2} = 1$) et k coefficients $\rho_i > 0$ (avec $\sum_{i=1}^{k} \rho_i = 1$) tels que :

1) $\alpha_i(f(q_i)-\bar{g}(q_i))+\beta_i(f'(q_i)-\bar{g}'(q_i)) = \operatorname{Max}_{q\in Q} (f-\bar{g})^2(q)+(f'-\bar{g}')^2(q) = B$

2) $\sum_{i=1}^{n} \rho_i(\alpha_i f(q_i)+\beta_i f'(q_i),\alpha_i f_1(q_i)+\beta_i f_1(q_i),\ldots,$

$$\alpha_i f_n(q_i)+\beta_i f_n(q_i)) = (B,0,\ldots,0) \quad .$$

4.3.5. APPROXIMATION DANS UN ESPACE PRODUIT.

Soient E_1 et E_2 deux espaces vectoriels normés dont les normes sont notées $\| \ \|_1$ et $\| \ \|_2$.

On considère l'espace produit $E_1 \times E_2$ de norme :

$$\|(f,g)\| = \|f\|_1 + \|g\|_2$$

On note U' (respectivement S_1' et S_2') la boule unité du dual fort de $E_1 \times E_2$ (respectivement E_1 et E_2).

Soit L l'ensemble des fonctionnelles de $(E_1 \times E_2)'$ de la forme :

$$(f,g) \mapsto \ < f,t_1 > + < g,t_2 >$$

avec t_1 extrémal de S_1' et t_2 extrémal de S_2' .

On a alors le lemme :

LEMME :

Si L est faiblement compact, les fonctionnelles extrémales de $(E_1 \times E_2)'$ sont dans L .

DEMONSTRATION :

Notons $n(f,g) = \|f\|_1 + \|g\|_2$.

On a d'une manière évidente :

$$n(f,g) = \operatorname{Max}_{t \in L} < (f,g),t >$$

donc :

$$n(f,g) = \chi_L^*(f,g) \quad \text{et} \quad \chi_L^{**} = n^* \qquad \text{(J.J. MOREAU [50])}$$

On a aussi :

$$n(f,g) = \operatorname{Max}_{t \in U'} < (f,g),t >$$

soit :

$$n(f,g) = \chi_{U'}^*(f,g) \text{ d'où } n^* = \chi_{U'}^{**} .$$

La fonction caractéristique de U' étant une fonction convexe propre de $(E_1 \times E_2)'$ on a :

$$\chi_L^{**} = \chi_{U'}^{**} = \chi_{U'}$$

d'où : (P.J. LAURENT [38])

$$U' = \overline{co}\ L$$

et, L étant faiblement compact, on en déduit (N. BOURBAKI [7]) :

$$E(U') \subset L \ .$$

Q.E.D.

Soit E un espace vectoriel normé, T_1 et T_2 deux applications linéaires continues de E sur E, et de E sur E_2 telles que

$$\text{Ker } T_1 \cap \text{Ter } T_2 = \{0\} \ .$$

On définit la norme sur E au moyen des normes de E_1 et E_2 par :

$$\|h\| = \|T_1 h\| + \|T_2 h\|$$

On a alors la proposition :

PROPOSITION 4.10 :

Les fonctionnelles extrémales de la boule unité du dual fort de E sont de la forme :

$$h \to \ < T_1 h, t_1 > + < T_2 h, t_2 >$$

où t_1 et t_2 sont des fonctionnelles extrémales de, respectivement, S_1' et S_2' .

DEMONSTRATION :

Notons T l'application de E dans $E_1 \times E_2$ définie par :

$$h \mapsto (T_1 h, T_2 h)$$

L'application T est linéaire, continue, biunivoque (car $\text{Ker } T_1 \cap \text{Ker } T_2 = \{0\}$) ; si on muni $E_1 \times E_2$ de la norme :

$$\|(f,g)\| = \|f\| + \|g\|$$

on a :

$$\|T\| = 1$$

(en effet $\|T\| = \sup_{\|h\|=1} \|Th\| = \sup(\|T_1 h\| + \|T_2 h\| \mid \|h\| = 1)$

et $\|h\| = \|T_1 h\| + \|T_2 h\|$)

Le dual topologique de $(E_1 \times E_2)'$ de $E_1 \times E_2$ s'identifie à $E_1' \times E_2'$.

L'application T étant surjective et de noyau réduit à zéro, sa transposée ${}^tT$ applique $E_1' \times E_2'$ sur E'.

Si on muni $(E_1 \times E_2)'$ de la topologie forte définie par la norme :

$$\|(t_1,t_2)\| = \text{Max}(\|t_1\|, \|t_2\|)$$

l'application ${}^tT$ applique la boule unité U' de $(E_1 \times E_2)'$ sur la boule unité S' de E'.

L'application linéaire ${}^tT$ est encore continue si on munit $(E_1 \times E_2)'$ et E' de la topologie faible (N. DUNFORD et J.T. SCHWARTZ [27] p. 478). Les boules U' et S' étant faiblement compactes on a (N. DUNFORD et J.T. SCHWARTZ [27] p. 439)

$$E({}^tTU') \subset {}^tTE(U')$$

ou

$$E(S') \subset {}^tTE(U') \ .$$

D'après le lemme 4.2, les fonctionnelles extrémales de U' sont de la forme (t_1,t_2) avec t_1 dans $E(S_1')$ et t_2 dans $E(S_2')$.

Par suite, tous les éléments t de $E(S')$ sont de la forme :

$$^tT(t_1,t_2) = {}^tT_1t_1 + {}^tT_2t_2$$

ou :

$$t : h \mapsto < T_1h,t_1 > + < T_2h,t_2 > \quad .$$

Q.E.D.

APPLICATION :

Supposons que l'on veuille approcher, dans l'espace W des fonctions de carré sommable et essentiellement bornées sur une partie compact Q de $\mathbb{R}^n$, une fonction f par un élément du sous espace vectoriel V engendré par $f_1,\ldots,f_n$ au sens de la norme :

$$\|h\| = \gamma \operatorname*{ess\,Sup}_{q\in Q} |h(q)| + S\sqrt{\int_Q h^2(q)dq} \qquad (\gamma \text{ et } \delta > 0) .$$

Si on note E l'espace W ainsi normé,

E_1 l'espace W normé par

$$\|h\| = \operatorname*{ess\,sup}_{q\in Q} |h(q)| \quad ,$$

E_2 l'espace W normé par

$$\|h\| = \sqrt{\int_Q h^2(q)dq} \quad ,$$

T_1 l'application $h \mapsto \gamma h$ de E dans E_1 et

T_2 l'application $h \mapsto \delta h$ de E dans E_2 alors,

en appliquant la proposition 4.10 on a

PROPOSITION 4.11 :

Les fonctionnelles extrémales de la boule unité de E' sont de la forme :

$$h \to \delta\varepsilon\, h(q) + \delta \int_Q h(q)e(q)dq$$

avec (ε,q,e) dans $\{-1,+1\} \times Q \times N$

où $N = \{g \in L^2(Q) \mid \int_Q g^2(q)dq = 1\}$.

DEMONSTRATION :

Les fonctionnelles de $E(S_1')$ sont de la forme :

$h \mapsto \varepsilon h(q)$ avec (ε,q) dans $\{-1,+1\} \times Q$

E_2 étant un espace de Hilbert, les fonctionnelles extrémales de S_2' s'identifient aux éléments de N.

Q.E.D.

On a alors ; en appliquant la proposition 4.4. :

PROPOSITION 4.12 :

Une condition nécessaire et suffisante pour que $\bar{g} = \sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i f_i$ soit un meilleur approximant de f dans V contenu dans l'espace W muni de la norme :

$$\|h\| = \gamma \operatorname*{ess\,sup}_{q\in Q} |h(q)| + \delta \sqrt{\int_Q h^2(q)dq} \qquad (\gamma \text{ et } \delta > 0)$$

est qu'il existe k $(k \leq n+1)$ éléments (ε_i,q_i,h_i) de $\{-1,+1\} \times Q \times \{g \in W \mid \int_Q g^2(q)dq = 1\}$ et k coefficients ρ_i (avec $\sum_{i=1}^{k} \rho_i = 1$) tels que, en posant $\bar{e} = f-\bar{g}$ on ait :

1) $\gamma\varepsilon_i\bar{e}(q_i) + \delta\int_Q \bar{e}(q)h_i(q)dq = \|\bar{e}\| \qquad i=1,\ldots,k$

2) $\sum_{i=1}^{k} \rho_i(\gamma\varepsilon_i f(q_i) + \delta\int_Q f(q)h_i(q)dq,\ldots,$

$$\gamma\varepsilon_i f_n(q_i) + \delta\int_Q f_n(q)h_i(q)dq) = (\|\bar{e}\|,0,\ldots,0) \ .$$

On peut aussi considérer dans $C^1(Q)$, espace des fonctions à dérivée première continue, la norme :

$$\|h\| = \delta \operatorname*{Max}_{q\in Q} |h(q)| + \delta \operatorname*{Max}_{q\in Q} |h'(q)|$$

On note V le sous espace vectoriel de $C^1(Q)$ engendré par $f_1,\ldots,f_n$.

On a alors la proposition suivante (P.J. LAURENT [41]) :

PROPOSITION 4.13 :

Une condition nécessaire et suffisante pour que $\bar{g} = \sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i f_i$ soit un meilleur approximant de f dans V pour la norme :

(1) $$\|h\| = \gamma \operatorname*{Max}_{q\in Q} |h(q)| + \delta \operatorname*{Max}_{q\in Q} |h'(q)|$$

est qu'il existe k $(k \leq n+1)$ éléments $(\varepsilon_i,\eta_i,q_i,r_i)$ de $\{-1,+1\}^2 \times Q^2$ et k coefficients $\rho_i > 0$ (avec $\sum_{i=1}^{k} \rho_i = 1$) tels que, en posant $\bar{e} = f-\bar{g}$, on ait :

1) $\gamma\varepsilon_i\bar{e}(q_i) + \delta\eta_i\bar{e}'(r_i) = \|\bar{e}\| \qquad i=1,\ldots,k$

2) $\sum_{i=1}^{k} \rho_i(\gamma\varepsilon_i f(q_i)+\delta\eta_i f'(r_i),\ldots,\gamma\varepsilon_i f_n(q_i)+\delta\eta_i f_n'(r_i)) = (\|\bar{e}\|,0,\ldots 0)$.

DEMONSTRATION :

Notons T_1 l'application $h \mapsto \gamma h$ de $C^1(Q)$ muni de la norme (1) dans $C^1(Q)$ muni de la norme $\operatorname*{Max}_{q\in Q} |h(q)|$ et T_2 l'application $h \mapsto \delta h'$.

On a :

$$\|h\| = \|T_1 h\|_1 + \|T_2 h\|_1$$

En appliquant la proposition 4.10, les fonctionnelles extrémales de $C^1(Q)$ normées par (1) sont de la forme :

$$h \mapsto \gamma < h, t_1 > + \delta < h', t_2 >$$

avec t_1 et t_2 extrémales de la boule unité du dual fort de $C^1(Q)$ muni de la norme $\| \ \|_1$. Les fonctionnelles t_1 et t_2 sont donc de la forme $h \mapsto \eta h(q)$, $((\eta,q)$ dans $\{-1,+1\} \times Q)$. Par suite, les fonctionnelles extrémales de $C^1(Q)$ muni de la norme (1) sont de la forme :

$$h \mapsto \gamma h(q) + \delta h'(r) \quad \text{avec} \quad (\gamma,q) \quad \text{et} \quad (\delta,r)$$

dans $\{-1,+1\} \times Q$.

En appliquant la proposition 4.4. on a le résultat.

Q.E.D.

4.3.6. APPROXIMATION DANS $L_1(Q;B)$.

Soit (Q,Σ,μ) un espace de mesure, μ étant une mesure positive σ-finie; soit B un espace de Banach dont la norme est notée $\| \ \|$.

On note $L_1(Q,\Sigma,\mu;B)$ l'espace des applications f de Q dans B telles que $q \mapsto \|f(q)\|$ soit mesurable sur S et pour lesquelles la norme :

$$\|f\| = \int_Q \|f(q)\| \mu(dq)$$

est finie.

On note $L_\infty(Q,\Sigma,\mu;B)$ l'espace des applications e de Q dans B telles que $q \mapsto \|e(q)\|$ soit μ-presque partout borné avec la norme:

$$\|e\| = \mu\text{-ess.sup}_{q \in Q} \|e(q)\|$$

On a alors la caractérisation suivante (SINGER [60] et M. BENAMARA [5]):

PROPOSITION 4.14 :

Les fonctionnelles extrémales de la boule unité du dual fort de $L_1(Q,\Sigma,\mu;B)$ sont de la forme :

$$f \mapsto \int_Q \langle e(q), f(q) \rangle \mu(dq)$$

où e est un élément de $L_\infty(Q,\Sigma,\mu;B')$ et e(q) est extrémal de la boule unité de B' pour μ-presque tout q de Q.

EXEMPLE :

Si on prend pour Q un compact de $\mathbb{R}^n$ muni de la mesure de Lebesgue-Stieltjes de fonction de répartition F telle que $dF = \omega(q)dq$ ($\omega(q) > 0$ pour tout q dans Q) et pour espace B la droite $\mathbb{R}$. L'espace $L_1(Q;\mathbb{R})$ est l'espace des fonctions absolument sommables sur Q muni de la norme :

$$\|f\| = \int_Q |f(q)|\omega(q)dq$$

Les fonctionnelles extrémales de la boule unité du dual fort de $L_1(Q)$ sont de la forme :

$$f \mapsto \int_Q e(q).f(q)\omega(q)dq$$

avec

$|e(q)| = 1$ pour presque tout q dans Q.

En appliquant la proposition 4.4 on a (SINGER [60]) :

PROPOSITION 4.15 :

Une condition nécessaire et suffisante pour que $\bar{g} = \sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i f_i$ soit meilleur approximant de f dans le sous espace vectoriel V de $L_1(Q;\mathbb{R})$ engendré par $f_1,\ldots,f_n$ (au sens de $\|h\| = \int_Q |f(q)|\omega(q)dq$) est qu'il existe k ($k \leq n+1$) fonctions e_i (telles que $|e_i(q)| = 1$ pour presque tout q dans Q) et k coefficients $\rho_i > 0$ (avec $\sum_{i=1}^{k} \rho_i = 1$) tels que :

1) $\int_Q e_i(q).(f-\bar{g})(q)\omega(q)dq = \int_Q |f(q)-\bar{g}(q)|\omega(q)dq \qquad i=1,\ldots,k$

2) $\sum_{i=1}^{k} \rho_i(\int_Q e_i(q)f(q)\omega(q)dq,\ldots,\int_Q e_i(q)f_n(q)\omega(q)dq) =$

$$(\int_Q |f(q)-\bar{g}(q)|\omega(q)dq,0,\ldots,0) \ .$$

REMARQUE :

La relation :

$$\int_Q e_i(q).(f-\bar{g})(q)\omega(q)dq = \int_Q |f(q)-\bar{g}(q)|\omega(q)dq$$

entraine que :

$$e_i(q) = \text{signe } (f-\bar{g})$$

pour presque tout q appartenant à $Q-Z(f-\bar{g})$.

(On note $Z(f-\bar{g})$ l'ensemble des q de Q tels que $(f-\bar{g})(q) = 0$) :

Si $Z(f-\bar{g})$ est de mesure nulle, les fonctions e_i $(i=1,\ldots,k)$ représentent le même élément de $L_1(Q)$ on a alors $k = 1$.

4.3.7. APPROXIMATION GLOBALE DANS $L_1(Q)$.

Supposons que l'on veuille approcher "globalement" (voir paragraphe 4.3.3.) un ensemble compact H de fonctions de $L_1(Q)$ par une fonction $\bar{g}$ appartenant au sous espace vectoriel V de $L_1(Q)$ engendré par $f_1,\ldots,f_n$. Plus précisément on cherche $\bar{g} = \sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i f_i$ dans V tel que :

(P) $$\alpha = \operatorname{Max}_{h\in H} \int_Q |\bar{g}-h|\omega(q)dq = \operatorname{Min}_{g\in V} \operatorname{Max}_{h\in H} \int_Q |g-h|\omega(q)dq$$

(voir LAURENT et PHAM-DINH-TUAN [43]).

Le problème (P) consiste à approcher dans $C(H;L_1(Q))$ la fonction identité par un élément du sous espace vectoriel engendré par les

n applications constantes de H dans $L_1(Q)$:

$$t \mapsto f_j \qquad (j=1,\ldots,n)$$

au sens de la norme :

$$|||\chi|| = \operatorname*{Max}_{f\in H} \int_Q |\chi(f)(q)|\omega(q)dq$$

on a en effet :

$$\alpha = ||| I - \sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i F_i ||| = \operatorname*{Min}_{x\in \mathbb{R}^n} ||| I - \sum_{i=1}^{n} x_i F_i |||$$

En appliquant la proposition 4.8 et en utilisant 4.14 on a le théorème de caractérisation :

PROPOSITION 4.16 :

Une condition nécessaire et suffisante pour que $\bar{g} = \sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i f_i$ soit un meilleur approximant "global" de l'ensemble de fonctions H de $L_1(Q)$ est qu'il existe k $(k \leq n+1)$ couples (e_i,h_i) (où e_i est une fonction de Q dans $\mathbb{R}$ telle que $e_i(q) = 1$ pour presque tout q dans Q et h_i une fonction de F) et k coefficients $\rho_i > 0$ (avec $\sum_{i=1}^{k} \rho_i = 1$) tels que :

1) $$\int_Q e_i(q).(h_i-\bar{g})(q)\omega(q)dq = \operatorname*{Max}_{h\in H} \int_Q |h(q)-\bar{g}|\omega(q)dq = ||| h-\bar{g}||| \quad i=1,\ldots,k$$

2) $$\sum_{i=1}^{n} \rho_i \left(\int_Q e_i(q)h_i(q)\omega(q)dq, \int_Q e_i(q)f_1(q)\omega(q)dq, \ldots,\right.$$

$$\left.\int_Q e_i(q)f_n(q)\omega(q)dq\right) = (||| h-\bar{g}||| ,0,\ldots,0) \ .$$

Supposons que l'ensemble H de fonctions de $L_1(Q)$ soit formé de fonctions continues $q \mapsto h(t,q)$ où t parcourt un compact T de $\mathbb{R}^n$.

On peut chercher à approcher "globalement en moyenne" l'ensemble de fonctions H au moyen d'un élément de V ; c'est-à-dire chercher un élément

$\bar{g} = \sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i f_i$ de V tel que :

$$(P) \qquad \alpha = \int_T \left[\int_Q \left| h(t,q) - \sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i f_i(q) \right| \omega(q) dq \right] w(t) dt$$

$$= \min_{x \in \mathbb{R}^n} \int_T \int_Q \left| h(t,q) - \sum_{i=1}^{n} x_i f_i(q) \right| \omega(q) w(t) dq dt$$

où w est une fonction strictement positive sur T (les intégrales sont prises au sens de Lebesgue Stieljes).

Ce type d'approximation revient à approcher dans $L_1[T;L_1(Q)]$ la fonction : $J : t \mapsto h(t,.)$ par un élément du sous espace vectoriel engendré par les applications constantes : $F_j : t \to f_j$ $(j=1,\ldots,n)$, au sens de la norme :

$$|||\chi||| = \int_T \|\chi(t)\| w(t) dt$$

ou $\| \|$ représente la norme de $L_1(Q)$.

En appliquant la proposition 4.4 et en utilisant la représentation des fonctionnelles extrémales du dual de $L_1(Q;B)$ donnée en 4.14 on a :

PROPOSITION 4.17 :

Une condition nécessaire et suffisante pour que $\bar{g} = \sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i f_i$ soit un meilleur approximant, en moyenne pondérée par w (w > 0 sur T), de l'ensemble de fonctions continues de $L_1(Q) = \{h(t,.) \mid t \in T\}$ où T est un compact de $\mathbb{R}^n$ (où $(\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_n)$ solution de (P)) est qu'il existe k $(k \leq n+1)$ fonctions e_i de $T \times Q$ dans $\mathbb{R}$ telles que

$$|e_i(t,q)| = 1$$

pour presque tout q dans Q et presque tout t dans T

et k coefficients $\rho_i > 0$ $(\sum_{i=1}^{k} \rho_i = 1)$ vérifiant :

1) $$\int_Q\int_T e_i(t,q)\Big(h(t,q) - \sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i f_i(q)\Big)w(t)\omega(q)dtdq$$

$$= \int_T\int_Q \Big|h(t,q) - \sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i f_i(q)\Big|\omega(q)w(t)dqdt = B$$

2) $$\sum_{i=1}^{k} \rho_i\Big[\int_Q\int_T e_i(t,q)h(t,q)w(t)\omega(q)dtdq, \int_Q\int_T e_i(t,q)f_1(q)w(t)\omega(q)dtdq,$$

$$\ldots, \int_Q\int_T e_i(t,q)f_n(q)w(t)\omega(q)dtdq\Big] = (B,0,\ldots,0).$$

4.4. - APPROXIMATION DANS UN CONVEXE D'UN SOUS ESPACE VECTORIEL DE DIMENTION FINIE.

Soit E un espace vectoriel normé de norme $\|\ \|$ et V un sous espace vectoriel de dimension n de E engendré par les éléments $f_1,\ldots,f_n$ de E .

Soit R un compact, c une application continue de R dans $\mathbb{R}$ et a une applicatinn faiblement continue de R dans E' le dual topologique de E . On note C le convexe de E défini par :

$$C = \{h \in E \mid c(r) \leq < h,a(r) > \quad \forall r \in R\}$$

Soit f un élément de E n'appartenant pas à V, on cherche un élément $\bar{g} = \sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i f_i$ de $V \cap C$ tel que :

(P) $$\alpha = \|f-\bar{g}\| = \text{Min}\,[\|f-g\| \mid g \in C \cap V] .$$

On fait l'hypothèse

H1 " Il existe h dans V tel que $c(r) < < h,a(s) > \ \forall r \in R$ " .

Notons Ψ l'application de S' boule unité du dual fort de E dans $\mathbb{R}^n$ définie par :

$$t \mapsto (< f_1,t > ,\ldots, < f_n,t >) \ ;$$

ξ l'applicatinn de R dans $\mathbb{R}^n$ définie par :

$$r \mapsto (< f_1,a(r) > ,\ldots, < f_n,a(r) >) \ ;$$

$$\Gamma_1 = \{y \in \mathbb{R}^{n+2} | y = (< f,t >, \Psi(t), 1) \quad \text{avec} \quad t \in E(S')\}$$

$$\Gamma_2 = \{y \in \mathbb{R}^{n+2} | y = (c(r), \xi(r), 0) \quad \text{avec} \quad r \in R\}$$

$$\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$$

On note $A(\Gamma)$ l'ensemble des hyperplans homogènes d'appui à Γ ; plus précisément, $H = \{y \in \mathbb{R}^{n+2} | (u|y) = 0\}$ est dans $A(\Gamma)$ si et seulement si $\underset{X \in \Gamma}{\text{Max}} \ (u|X) = 0$.

LEMME 4.3 :

L'intersection de l'hyperplan de $A(\Gamma)$:

$$H_x = \{y \in \mathbb{R}^{n+2} | ([1,-x,-d]|y) = 0\} \qquad (x=(x_1,\ldots,x_n))$$

ayant un point commun avec Γ_1

avec la droite D d'équation $y = 0$ et $y_{n+1} = 1$ est

$$(0,\ldots 0, \|f-g\|) \text{ avec } g = \sum_{i=1}^{n} x_i f_i \text{ élément de C .}$$

DEMONSTRATION :

Si H_x appartient à $A(\Gamma)$ on a :

$$([1-x,-d]|[< f,t >, \Psi(t), 1]) \leq 0 \text{ pour tout t de } E(S')$$

soit :

$$< f - \sum_{i=1}^{n} x_i f_i, t > \leq d \qquad \forall t \in E(S')$$

où $\|f-g\| \leq d$.

L'hyperplan H_x ayant un point commun avec Γ_1 on a $\|f-g\| = d$.
On a aussi :

$$([1,-x,-d]|[c(r), \xi(r), 0]) \leq 0$$

soit

$$c(r) - < g, a(r) > \leq 0$$

par suite g appartient à C.

PROPOSITION 4.18 :

Une condition nécessaire et suffisante pour que $\bar{g} = \sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i f_i$ soit un meilleur approximant de f dans $C \cap V$ est que l'intersection, de l'hyperplan $\bar{H}$ de $A(\Gamma)$ orthogonal à $(1,-x_1,\ldots,-x_n,-\|f-\bar{g}\|)$ et de la droite D d'équation $y_i = 0$ $i=1,\ldots,n$ et $y_{n+1} = 1$, appartienne au cône convexe engendré par k points ($k \leq n+1$) de $\bar{H} \cap \Gamma$.

DEMONSTRATION :

On a :

(P) $\alpha = \text{Min}\,[\|f-g\| \mid g \in V \cap C]$

$= \text{Min}\,[([x,x_{n+1}]|[0,1]) \mid \|f - \sum_{i=1}^{n} x_i f_i\| \leq x_{n+1}$

et $c(r) \leq ([x,x_{n+1}]|[\xi(r),0])\ \forall r \in R]$

$= \text{Min}\,[([x,x_{n+1}]|[0,1]) \mid < f,t > \ \leq ([x,x_{n+1}]|[\psi(t),1])$

$\forall t \in S'$ et $c(r) \leq ([x,x_{n+1}]|[\xi(r),0]\ \forall r \in R]$

Si on note K le compact $\{1,2\} \times S' \times R$ (muni de la topologie produit), c' et a' les applications de K dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^{n+1}$:

$$c' : (i,t,r) \mapsto \begin{cases} < f,t > & \text{si } i=1 \\ c(r) & \text{si } i=2 \end{cases}$$

$$a' : (i,t,r) \mapsto \begin{cases} [\psi(t),1] & \text{si } i=1 \\ [\xi(r),0] & \text{si } i=2 \end{cases}$$

Le problème (P) s'écrit :

$$\alpha = \text{Min}\,[(x|z) \mid c(s) \leq (x|a'(s))\ \ \forall s \in K]$$

avec $z = (0,1) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$.

En appliquant la proposition 1.3 et la technique de la proposition 4.3, l'élément $\bar{x} = (\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_{n+1})$ sera solution s'il existe $(\bar{r},\bar{\ell})$ appartenant à $cc(c'(K) \times a'(K)) \cap \mathbb{R} \times \{(0,1)\}$ tel que :

$$([1,-\bar{x}]\,|\,[\bar{r},\bar{\ell}]) = 0$$

on a :

$$\bar{r} = \sum_{i=1}^{k} \rho_i c'(s_i) \qquad \bar{\ell} = \sum_{i=1}^{k} \rho_i a'(s_i) = (0,1) \qquad k \leq n+1$$

et

$$([1,-\bar{x}]\,|\,[c'(s_i),a'(s_i)]) = 0 \qquad i=1,\ldots,k$$

Pour que $\bar{\ell}$ soit égal à $(0,1)$ on doit avoir un élément $a'(s_i)$ de la forme $(\Psi(t_i),1)$, ce qui entraine que $\bar{x}_{n+1} = \|f-\bar{g}\|$.

Les points $X_i = (c'(s_i),a'(s_i))$ $(i=1,\ldots,k)$ appartiennent donc à $\bar{H} \cap \Gamma$, avec

$$\bar{H} = \{y \in \mathbb{R}^{n+2} \,|\, ([1,-\bar{x},-\|f-\bar{g}\|]\,|\,y) = 0\}$$

L'intersection de $\bar{H}$ avec la droite D est $(\|f-\bar{g}\|,0,1)$ qui est le cône convexe engendré par les k points X_i .

Q.E.D.

PROPOSITION 4.19 :

Une condition nécessaire et suffisante pour que $\bar{g} = \sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i f_i$ soit un meilleur approximant de f dans $V \cap C$ est qu'il existe m fonctionnelles de $E(S')$: $t_1,\ldots,t_m$ $(m \geq 1)$, m coefficients $\lambda_i > 0$ $(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1)$; p éléments de R : $r_1,\ldots,r_p$ $(p \geq 0)$; p coefficients $\mu_i > 0$ avec $m+p \leq n+1$ tels que :

1) $< f-\bar{g}, t_i > = \|f-\bar{g}\| \qquad i=1,\ldots,m$

2) $c(r_i) = < \bar{g}, a(r_i) > \qquad i=1,\ldots,p$

3) $$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i(< f,t_i >, < f_1,t_i >,\ldots,< f_n,t_i >) + \sum_{i=1}^{p} \mu_i(c(r_i), < f_1,a(r_i) >,\ldots,$$

$$< f_n,a(r_i) >) = (\|f-\bar{g}\|,0,\ldots,0) \ .$$

DEMONSTRATION :

D'après la proposition 4.18, l'hyperplan $\bar{H}$ d'équation :

$$\{y \in \mathbb{R}^{n+2} | ([1,-\bar{x},\|f-\bar{g}\|]|y) = 0\}$$

et d'appui à Γ contient k $(k \leq n+1)$ points X_i de Γ . Ces points sont donc de la forme $(< f,t > ,\Psi(t),1)$ ou $(c(r),\xi(r),0)$ avec t dans S' et r dans R. En utilisant le lemme 4.2, $\bar{H}$ est aussi d'appui à Γ_1 on a donc :

$$([1,-\bar{x},\|f-\bar{g}\|]|[< f,t_i >,\Psi(t_i),1]) = 0$$

$$i=1,\ldots,m \text{ avec } t_i \in E(S')$$

et

$$([1,-\bar{x},\|f-\bar{g}\|]|[c(r_i),\xi(r_i),0]) = 0$$

$$i=1,\ldots,p \text{ avec } r_i \in R.$$

Soit :

$$< f-\bar{g}, t_i > = \|f-\bar{g}\| \qquad i=1,\ldots,m$$

et

$$c(r_i) = < \bar{g}, a(r_i) > \qquad i=1,\ldots,p$$

et

$$m+p \leq n+1 \ .$$

De plus, d'après 4.18, on a :

$$(\|f-\bar{g}\|,0,1) = \sum_{i=1}^{k} \rho_i X_i \quad \text{avec} \quad \rho_i > 0$$

soit, en notant λ_i les ρ_i coefficients de points X_i de la forme $(< f,t_i > ,\Psi(t_i),1)$ et μ_i les ρ_i coefficients de points X_i de la forme :

$$(c(r_i),\xi(r_i),0)$$

on a :

$$(\|f-\bar{g}\|,0,1) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(< f,t_i > ,\Psi(t_i),1) + \sum_{i=1}^{p} \mu_i(c(r_i),\xi(r_i),0)$$

D'où :

$$(\|f-\bar{g}\|,0) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(< f,t_i > , < f_1,t_i > ,\ldots, < f_n,t_i >$$

$$+ \sum_{i=1}^{p} \mu_i(c(r_i), < f_1,a(r_i) > ,\ldots, < f_n,a(r_i) >$$

et $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$.

Q.E.D.

CHAPITRE 5

ALGORITHME D'ECHANGE POUR LA CONSTRUCTION D'UN MEILLEUR APPROXIMANT DANS UN ESPACE VECTORIEL NORME

On applique l'algorithme d'échange général au problème particulier de la recherche, dans un espace vectoriel normé, d'un meilleur approximant d'un élément f par un élément du sous espace vectoriel de dimension n engendré par n éléments : $f_1,\ldots,f_n$. On obtient l'algorithme de Rémès [53] généralisé par P.J. LAURENT [38]. On étudie le rôle joué par la "condition de Haar" dans le comportement de l'algorithme de Rémès. On applique la méthode à plusieurs espaces vectoriels normés de fonctions et à l'approximation "globale" d'un ensemble.

5.1 - ALGORITHME DE REMES GENERALISE.

Soit E un espace vectoriel normé. On notera $\|\ \|$ la norme de E. Soit f un élément de E et V le sous espace vectoriel engendré par les éléments $f_1,\ldots,f_n$ de E.

On cherche un élément $\bar{g}$ de V vérifiant :

(P) $$\alpha = \|f-\bar{g}\| = \text{Min}\,[\|f-g\| \mid g \in V]$$

On note M(f) l'ensemble des solutions :

$$M(f) = \{g \in V \mid \alpha = \|f-g\|\} \quad .$$

On appellera M(f) l'ensemble des meilleurs approximants de f dans V.

Le problème (P) peut aussi s'écrire (chapitre 4) :

$$\alpha = \text{Min}\left[d \;\middle|\; < f,t > \;\leq \sum_{i=1}^{n} x_i < f_i,t > + d \quad \forall t \in S'\right]$$

où S' désigne la boule unité du dual fort de E :

$$S' = \{t \in E' \;\middle|\; \sup_{\|x\|=1} < x,t > \;\leq 1\}$$

On pose :

$$< f,t > = c(t) \quad , \quad a(t) = (< f_1,t > ,\ldots, < f_n,t >)$$

et $j(t) = (c(t),a(t))$.

La boule S' étant $\sigma(E',E)$ compact et les applications c et a étant $\sigma(E',E)$ continues, on peut appliquer l'algorithme d'échange décrit au chapitre 2.

En posant $z = (0,\ldots,0,1) \in \mathbb{R}^{n+1}$ on a en effet :

$$\alpha = \text{Min}\left[([x,d]|z) \,\middle|\, c(t) \leq ([x,d]|[a(t),1]) \quad \forall t \in S'\right]$$

A l'étape k on dispose de n+1 éléments t_j^k de S' et n+1 coefficients $\rho_j^k > 0$ tels que :

$$\sum_{j=1}^{n+1} \rho_j^k (a(t_j^k),1) = (0,1)$$

soit :

$$(1) \qquad \sum_{j=1}^{n+1} \rho_j^k a(t_j^k) = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{j=1}^{n+1} \rho_j^k = 1$$

La relation (1) revient à dire que la fonctionnelle $L(h) = \sum_{j=1}^{n+1} \rho_j^k h(t_j^k)$ s'annule sur V (voir LAURENT [38]).

On détermine l'élément (x^k,d^k) de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ tel que :

$$([x^k,d^k]|[a(t_j^k),1]) = c(t_j^k) \qquad j=1,\ldots,n+1$$

ou :

$$c(t_j^k)-(x^k|a(t_j^k)) = d^k \qquad j=1,\ldots,n+1 \tag{2}$$

Si on note e^k l'erreur $f - \sum_{i=1}^{n} x_i^k f_i$ à l'étape k, la relation (2) s'écrit :

$$< e,t_j^k > = d^k \quad , \qquad j=1,\ldots,n+1 \ .$$

Pour passer à l'étape k+1 on calcule :

$$\bar{i}^k = \operatorname{Max}_{t\in S'} [c(t)-([x^k,d^k]|[a(t),1])] \ ,$$

ce qui peut encore s'écrire :

$$\bar{i}^k = \operatorname{Max}_{t\in S'} [< f - \sum_{i=1}^{n} x_i^k f_i,t >]-d^k$$

$$= \|f - \sum_{i=1}^{n} x_i^k f_i\|-d^k$$

ou :

$$\bar{i}^k = \|e^k\|-d^k$$

On pose $\bar{d}^k = \|e^k\|$.

Si $\bar{d}^k-d^k = 0$ on pose conventionnellement :

$$t_j^{k+1} = t_j^k \quad \text{et} \quad \rho_j^{k+1} = \rho_j^k \qquad (j=1,\ldots,n+1)$$

(on a alors en fait $\bar{d}^k = d^k =$) .

Si $\bar{d}^k-d^k > 0$ on détermine un élément z^{k+1} de S' tel que :

$$\bar{i}^k = \|e^k\|-d^k = c(z^{k+1})-([x^k,d^k]|[a(z^{k+1}),1])$$

ou :

$$\|e^k\| = < e^k,z^{k+1} > \quad .$$

On dit quelquefois que l'élément z^{k+1} décompose la norme de e^k (voir N. GASTINEL [31']). Un tel élément z^{k+1} est un sous gradient de la fonctionnelle norme en e^k .

On échange l'élément z^{k+1} avec un élément $t^k_{j^k_o}$ de façon à pouvoir construire de nouveaux coefficients positifs ρ^{k+1}_j tels que :

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq j^k_o}}^{n+1} \rho^{k+1}_j (a(t^k_j),1) + \rho^{k+1}_{j^k_o}(a(z^{k+1}),1) = (0,1)$$

ou, en posant :

$$t^{k+1}_j = \begin{cases} t^k_j & \text{si} \quad j \neq j^k_o \\ z^{k+1} & \text{si} \quad j = j^k_o \end{cases}$$

$$\sum_{j=1}^{n+1} \rho^{k+1}_j \, a(t^{k+1}_j) = 0 \qquad \sum_{j=1}^{n+1} \rho^{k+1}_j = 1$$

On peut remarquer que l'échange ne concerne que les éléments :

$$u^k_j = (c_j(t^k_j), a(t^k_j), 1), \qquad j=1,\ldots,n+1 \ ,$$

en tant qu'éléments de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. En effet ces éléments nous suffisent pour calculer x^k et d^k .

En pratique, on opère, l'échange de l'élément $u^k_{j^k_o}$ avec l'élément $\ell^{k+1} = (c(z^{k+1}), a(z^{k+1}), 1)$ sans conserver à chaque étape les éléments t^k_j qui peuvent, pour certaines normes, être compliqués.

DEFINITION :

On dit que l'algorithme est itératif si à chaque étape les coefficients ρ^k_j sont strictement positif.

REMARQUE :

On sait que (LAURENT [38]), si $E(S')$ désigne les éléments extrémaux de S' on a , pour tout h dans E :

$$\|h\| = \text{Max}\,[< h,t > \mid t \in E(S')]$$

On peut donc restreindre la recherche de l'élément z^{k+1} aux éléments extrémaux de S' et plus généralement à tout ensemble F contenu dans S' tel que, pour tout h dans E il existe t dans F tel que :

$$\|h\| = < h,t >$$

On prendra systématiquement dans la suite $F = E(S')$.

L'algorithme d'échange décrit dans ce cas est exactement l'algorithme de Rémès généralisé décrit par P.J. LAURENT [38] .

Pour des raisons pratiques, on ne choisit pas un élément z^{k+1} tel que $\|e^k\| = < e^k, z^{k+1} >$ mais tel que :

1) $< e^k, z^{k+1} > \geq \|e^k\| - \eta^k$

2) $< e^k, z^{k+1} > > d^k$

La quantité $\eta^k > 0$ représente l'erreur commise dans la détermination du sous gradient à l'étape k.

Afin de permettre le démarrage de l'algorithme, on fera l'hypothèse :

H4 " Il existe un ensemble M de n+1 éléments de S' tels que, quels que soient $t_1, \ldots, t_n$ de M le déterminant :

$$\det\,[< f_i, t_j >]$$

est différent de zéro ".

REMARQUE :

Cette hypothèse n'est pas la "condition de Haar" .

PROPOSITION 5.1 :

Si l'algorithme est itératif, si la suite $\{\eta^k\}$ est telle que :

$$\lim_{k\to\infty} \eta^k = 0$$

et si l'hypothèse H4 est vérifiée,
alors :

i) $\lim_{k\to\infty} d^k = \alpha$

ii) il existe une sous suite $\{d^{\Psi(k)}\}$ de $\{d^k\}$ telle que :

$$\lim_{k\to\infty} (\|e^{\Psi(k)}\| - d^{\Psi(k)}) = 0$$

DEMONSTRATION :

Il suffit d'appliquer le théorème 2.1, en vérifiant les hypothèses H1 et H2. L'hypothèse H1 est trivialement vérifiée. L'hypothèse H2 revient à dire qu'il existe n+1 éléments t_i' de S' et n+1 coefficients $\rho_i > 0$ tels que :

$$\sum_{i=1}^{n+1} \rho_i(< f_1,t_i' > ,\ldots, < f_n,t_i' >) = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{n+1} \rho_i = 1$$

L'hypothèse H4 étant vérifiée, il existe un ensemble M de n+1 fonctionnelles de S' tel que :

$$\det [< f_i,t_j >] \neq 0 \text{ pour tout } (t_1,\ldots,t_n) \text{ de } M^n$$

On résoud le système linéaire :

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j < f_i,t_j > = - < f_i,t_{n+1} > \qquad i=1,\ldots,n$$

avec $\{t_1,\ldots,t_{n+1}\} = M$.

L'hypothèse H4 entraine que le système linéaire a une solution et que $\lambda_j \neq 0$ $j=1,\ldots,n$; en effet $\lambda_{j_o} = 0$ entraine

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq j_o}}^{n+1} \lambda_j < f_i,t_j > = 0 \quad \text{avec} \quad \lambda_{n+1} = 1$$

d'où :

$$\det [< f_i,t_j >] = 0 \quad \text{pour} \quad t_1,\ldots,t_{j_o-1},t_{j_o+1},\ldots,t_n .$$

En posant :

$$K = \sum_{j=1}^{n} |\lambda_j| + 1 \quad \text{et} \quad \rho_j = |\lambda_j| * \frac{1}{K}$$

$$t'_j = \text{signe } \lambda_j . t_j \qquad (j=1,\ldots,n+1)$$

On a :

$$\sum_{j=1}^{n+1} \rho_j (< f_1,t'_j > ,\ldots, < f_n,t'_j >) = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{j=1}^{n+1} \rho_j = 1 .$$

L'hypothèse H2 du théorème 2.1 est donc vérifiée.

Q.E.D.

5.2 - INTERPRETATION GEOMETRIQUE DE L'ALGORITHME DE REMES GENERALISE.

La norme d'un élément g de E s'écrivant :

$$\|g\| = \text{Max} [< g,t > \mid t \in E(S')]$$

Si $\bar{g}$ désigne un meilleur approximant de f dans V on a :

$$\alpha = \|f-\bar{g}\| = \text{Min}_{g\in V} \ \text{Max}_{t\in E(S')} < f-g,t >$$

On pose :

$$a(t) = (< f_1,t > ,\ldots, < f_n,t >) \quad c(t) = < f,t > \quad j(t) = (c(t),a(t))$$

En posant $x = (x_1,\ldots,x_n)$ et en notant $(|)$ le produit scalaire euclidien dans $\mathbb{R}^{n+1}$ on obtient :

$$\alpha = \operatorname*{Min}_{x\in\mathbb{R}^n} \operatorname*{Max}_{t\in E(S')} ([1,-x]|j(t))$$

où, en posant :

$$\Gamma = j(E(S'))$$

et

$$\bar{d}_x = \operatorname*{Max}_{X\in\Gamma} ([1,-x]|X) = \Big\|f - \sum_{i=1}^{n} x_i f_i\Big\|$$

on a :

$$\alpha = \operatorname*{Min}_{x\in\mathbb{R}^n} \bar{d}_x$$

On note $e_o = (1,0,\ldots,0) \in \mathbb{R}^{n+1}$ et D_o^+ la demi droite de $\mathbb{R}^{n+1}$ engendrée par e_o :

$$D_o^+ = \{X \in \mathbb{R}^{n+1} | X = \lambda e_o, \text{ avec } \lambda \geq 0\}$$

L'élément $\bar{d}_x e_o$ représente l'intersection avec D_o^+ de l'hyperplan d'appui à Γ orthogonal à la direction $(1,-x)$ de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.

La recherche d'un meilleur approximant revient donc à rechercher un hyperplan $\bar{H}$ d'appui à Γ qui coupe D_o^+ le plus près possible de zéro.

On dira qu'un hyperplan est optimal s'il est d'appui à Γ et coupe D_o^+ en :

$$\alpha e_o = \bar{I}$$

Tout hyperplan optimal définit un meilleur approximant ; il suffit pour celà de considérer le vecteur $(1,-x_1,\ldots,-x_n)$ orthogonal à l'hyperplan $\sum_{i=1}^{n} x_i f_i$ est alors un meilleur approximant.

Nous allons caractériser, parmi les hyperplans d'appui à Γ qui coupent D_o^+ ceux qui sont optimaux.

Notons que, les éléments $f_1,\ldots,f_n$ étant linéairement indépendants, un hyperplan d'appui à Γ ne peut contenir la droite D_o . En effet, soit H de direction (0,x) un tel hyperplan ; Γ étant symétrique (car $E(S')$ est équilibré), si H contient D_o il contient aussi Γ ; on a donc :

$$(x|a(t)) = 0 \text{ , pour tout t de } E(S'),$$

ce qui entraine :

$$< \sum_{j=1}^{n} x_j f_j , t > = 0 \text{ , pour tout t de E' ,}$$

par suite :

$$\sum_{j=1}^{n} x_j f_j = 0 \qquad \text{, avec } x \neq 0 .$$

PROPOSITION 5.2 :

Soit H un hyperplan d'appui à Γ qui coupe D_o^+ en I.
Une condition nécessaire et suffisante pour que H soit un hyperplan optimal est qu'il existe k $(1 \leq k \leq n+1)$ points de $H \cap \Gamma$ tels que I appartienne à l'enveloppe convexe de ces k points.

DEMONSTRATION :

Il s'agit d'une formulation géométrique d'un théorème de caractérisation d'un meilleur approximant dans V (I.SINGER [60], P.J. LAURENT [38]).

Soient $X_j = (< f,t_j > , < f_1,t_j > ,\ldots, < f_n,t_j >)$ les k points de $H \cap \Gamma$ tels que :

$$\bar{d}\, e_o = I = \sum_{j=1}^{k} \rho_j X_j \qquad \text{avec} \qquad \rho_j \geq 0 \qquad \text{et} \qquad \sum_{j=1}^{k} \rho_j = 1 .$$

Cette relation est équivalente à :

$$< f, \sum_{j=1}^{k} \rho_j t_j > = \bar{d} = \| f - \sum_{j=1}^{n} x_j f_j \|$$

avec $(1,-x) = (1,-x_1,\ldots,-x_n)$ orthogonal à H, et :

$$< f_i, \sum_{j=1}^{k} \rho_j t_j > = 0 \quad , \quad i=1,\ldots,n \quad ,$$

ce qui équivaut à dire que $\sum_{j=1}^{k} \rho_j t_j$ s'annule sur V.

Posons :

$$g = \sum_{j=1}^{n} x_j f_j$$

L'hyperplan H a pour équation :

$$H = \{X \in \mathbb{R}^{n+1} | (X|[1,-x]) = \bar{d}\}$$

et puisque X_j est dans H, on a :

$$< f,t_j > = \bar{d} \quad \text{et} \quad < f_i,t_j > = 0 \qquad i=1,\ldots,n$$

d'où :

$$< f-g,t_j > = \| f-g \| \qquad j=1,\ldots,k$$

En appliquant le théorème 3 de [38] , g est un meilleur approximant, donc H est un hyperplan optimal.

Q.E.D.

REMARQUE :

On pourrait faire une démonstration de la proposition 5.2 indépendante de la nature particulière de l'ensemble Γ (voir C. CARASSO [14]).

L'algorithme de Rémès généralisé à pour but de déterminer une suite d'hyperplan H^k coupant D_o^+ en $d^k e_o$ et tels que :

$$\lim_{k\to\infty} d^k = \alpha \quad , \quad \text{avec} \quad d^k < d^{k+1} \quad , \quad k=1,2,...$$

Passage de l'étape k à l'étape k+1 :

On dispose à l'étape k de n+1 points indépendants X_j^k (j=1,...,n+1) de Γ engendrant un hyperplan H^k qui coupe D_o^+ en $I^k = d^k e_o$ appartenant à l'intérieur relatif de l'enveloppe convexe des X_j^k (j=1,...,n+1).

Soit $\bar{H}^k$ l'hyperplan d'appui à Γ parallèle à H^k coupant D_o^+ en $\bar{I}^k = \bar{d}^k e_o$ avec $d^k \leq \bar{d}^k$. On choisit un point Z^{k+1} de $\bar{H}^k \cap \Gamma$.

On note S^k l'enveloppe convexe des n+2 points de $\mathbb{R}^{n+1}$:

$$X_1^k,...,X_{n+1}^k,Z^{k+1} .$$

La demi droite D_o^+ pénètre dans S^k en I^k appartenant à la face de dimension n de S^k de sommets X_j^k (j=1,...,n+1) ; elle ressort de S^k au point $I^{k+1} = d^{k+1}.e_o$.

Deux éventualités peuvent se produire :

(1) $d^k = \bar{d}^k$. L'hyperplan H^k est alors un plan d'appui à et d'après la proposition 5.2, c'est un hyperplan optimal ; on a donc :

$$d^k = \alpha .$$

(2) $d^k < \bar{d}^k$. On a alors deux éventualités selon la position de Z^{k+1}.

2.a) I^{k+1} appartient à l'intérieur relatif d'une face de dimension n de S^k de sommets :

$$Z^{k+1}, X_j^k \qquad (j=1,...,n+1 \; ; \; j \neq j_o^k) .$$

On pose alors :

$$X_j^{k+1} = X_j^k \qquad j=1,\ldots,n+1 \ ; \ j \neq j_o^k$$

et

$$X_{j_o^k}^{k+1} = Z^{k+1} \ .$$

l'hyperplan H^{k+1} est alors l'hyperplan passant par les points X_j^{k+1} $(j=1,\ldots,n+1)$.

2.b) Le point I^{k+1} appartient à une face de dimension r $(r < n)$ de S^k . On dit alors que l'algorithme n'est pas itératif, et que k est un "indice d'arrêt de l'algorithme".

REMARQUES :

On doit se donner au départ n+1 points X_j^o de Γ $(j=1,\ldots,n+1)$ tels que l'hyperplan H^o qu'ils engendrent coupe D_o^+ en $I^o = d^o e_o$ appartenant à l'intérieur relatif de l'enveloppe convexe de ces points. Ceci est toujours possible grâce à l'hypothèse H4.

Si on note $(1,-x^k)$ l'élément de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ orthogonal à H^k (et $\bar{H}^k$) on a à chaque étape :

$$\| f - \sum_{i=1}^{n} x_i^k f_i \| = \bar{d}^k$$

avec :

$$g^k = \sum_{i=1}^{n} x_i^k f_i \quad \text{et} \quad e^k = f - g^k$$

(erreur à l'étape k) :

$$\| e^k \| = \bar{d}^k \ .$$

On a par ailleurs :

$$X_j^k = j(t_j^k) \quad \text{avec} \quad t_j^k \text{ dans } E(S') \ , \quad j=1,\ldots,n \ .$$

Si on pose :

$$M^k = \{t_1^k, \ldots, t_n^k\}$$

alors g^k peut être interprété comme la meilleure approximation de f au sens de la semi norme :

$$p_k(h) = \max_{t \in M^k \cup M^k} < h,t >$$

On a en effet, en appliquant la proposition 5.2 :

$$d^k = p_k(f-g^k) = \min_{g \in V} p_k(f-g^k) \quad .$$

Pour une utilisation systématique des semi-normes on consultera P.J. LAURENT ([41]).

A chaque étape k on a les inéquations :

$$d^k \leq \alpha \leq \bar{d}^k \quad .$$

On arrête l'algorithme lorsque $\bar{d}^k - d^k \leq \varepsilon$; on a alors :

$$\alpha \leq \|f-g^k\| \leq \alpha + \varepsilon \quad .$$

5.3 - DEMONSTRATION GEOMETRIQUE DE LA CONVERGENCE DE L'ALGORITHME DE REMES GENERALISE DANS LE CAS ITERATIF.

Nous allons utiliser l'interprétation géométrique de l'algorithme de Rémès généralisé pour démontrer géométriquement la convergence de l'algorithme (proposition 5.1).

Nous supposerons pour simplifier que la suite $\{\eta^k\}$ représentant l'erreur dans le calcul $\|e^k\|$ est nulle.

LEMME 5.1 :

Pour tout k on a la norme euclidienne de x^k qui est borné supérieurement.

DEMONSTRATION :

Notons :

$$h^k = (1,-x^k) \,/\, \sqrt{1+\|x^k\|^2}$$

la direction unitaire orthogonales à $\bar{H}^k$; si $\|x^k\|^2$ était non borné, on pourrait extraire de $\{h^k\}$ une sous suite convergeant vers un élément $(0,h_1,\ldots,h_n)$ auquel correspondrait l'hyperplan d'équation :

$$([0,h_1,\ldots,h_n]|X) = 0$$

et d'appui à Γ ; cet hyperplan contiendrait donc Γ qui est symétrique. Les éléments $f_1,\ldots,f_n$ ne seraient alors pas linéairement indépendants.

Q.E.D.

Démonstration géométrique de la proposition 5.1.

Le cas où l'éventualité (1) se produit étant trivial, nous supposerons que l'on se trouve toujours dans l'éventualité 2.a (le cas 2.b correspond au cas non itératif).

Le polyèdre S^k de sommets $X_1^k,\ldots,X_{n+1}^k,Z^{k+1}$ est alors un n+1 simplexe dans $\mathbb{R}^{n+1}$.

Si $X_1,X_2,\ldots,X_{r+1}$ désignent r+1 sommets de S^k, on note $[X_1,\ldots,X_{r+1}]$ la variété linéaire de dimension r engendrée par ces r+1 points. On note d(X,A) la distance euclidienne dans $\mathbb{R}^{n+1}$ d'un point X à un ensemble A . Notons F_p^k l'ensemble des faces de dimension p $(0 \leq p \leq n)$ de S^k . Une face élément de F_p^k est définie par la donnée de p+1 sommets appartenant à S^k .

Soit U^k l'intersection de la droite $[Z^{k+1},I^{k+1}]$ avec H^k . U^k appartient à la face de dimension n-1 de sommets :

$$X_j^k \qquad (j=1,\ldots,n+1 \; ; \; j \neq j_o^k) \; .$$

Posons :

$$\rho^{k+1} = \frac{d^{k+1}-d^k}{\bar{d}^k-d^k} \qquad (\rho^{k+1} \geq 0) \quad ;$$

les hyperplans H^k et $\bar{H}^k$ étant **parallèles**, on a aussi :

$$I^{k+1} - U^k = \rho^{k+1} (Z^{k+1} - U^k) \ .$$

Soit p le plus grand entier tel qu'il existe $\eta > 0$ vérifiant pour tout $k \in \mathbb{N}$, $(k=0,1,2,\ldots)$ la relation :

$$\operatorname{Min}_{F \in F_p^k} d(I^{k+1},[F]) > \eta \ .$$

1) Supposons que l'on ne puisse trouver un scalaire $\eta > 0$ tel que :

$$\operatorname{Min}_{F \in F_o^k} d(I^{k+1},[F]) > \eta \qquad \text{(c'est-à-dire } p < 0)$$

ou

$$\operatorname{Min}_{i=1,\ldots,n+1} [d(I^{k+1},X_i^k), d(I^{k+1},Z^{k+1})] > \eta$$

On peut alors trouver une suite $X_{i_k}^{\eta(k)}$ de sommets de $S^{\eta(k)}$ tels que :

$$\lim_{k\to\infty} d(I^{\eta(k)+1}, X_{i_k}^{\eta(k)}) = 0 \qquad i_k \in \{1,\ldots,n+1\}$$

Supposons que le point $X_{i_k}^{\eta(k)}$ ait été introduit à l'étape $\Psi(k)$ (avec $\Psi(k) < \eta(k)$) , on a alors :

$$X_{i_k}^{\eta(k)} = X_{i_k}^{\Psi(k)+1} = Z^{\Psi(k)+1} \ .$$

De l'appartenance de $\bar{I}^{\Psi(k)}$ et de $Z^{\Psi(k)+1}$ à l'hyperplan $\bar{H}^{\Psi(k)}$ on tire :

$$([1,-x^{\Psi(k)}] | \bar{I}^{\Psi(k)}) = \bar{d}^{\Psi(k)}$$

et

$$([1,-x^{\Psi(k)}] | X_{i_k}^{\eta(k)}) = \bar{d}^{\Psi(k)} \ .$$

Les éléments $x^{\psi(k)}$ étant bornés (lemme 5.1), on en déduit :

$$\lim_{k\to\infty} d(\bar{I}^{\psi(k)}, X_{i_k}^{\eta(k)}) = 0$$

et par suite :

$$\lim_{k\to\infty} d(\bar{I}^{\psi(k)}, I^{\eta(k)+1}) = 0$$

soit :

$$\lim_{k\to\infty} (\bar{d}^{\psi(k)} - d^{\eta(k)+1}) = 0$$

De l'inéquation :

$$d^{k-1} < d^k \leq \alpha \leq \bar{d}^k$$

pour tout k et de la relation $\|e^{\psi(k)}\| = \bar{d}^{\psi(k)}$; on déduit que :

$$\lim_{k\to\infty} d^k = \alpha \quad \text{et} \quad \lim_{k\to\infty} (\|e^{\psi(k)}\| - d^{\psi(k)}) = 0$$

2) Supposons que l'on ait $p \geq 0$.

Il existe alors un scalaire $\eta > 0$ tel que :

$$d(I^{k+1}, X_i^k) \geq \eta \qquad \text{pour } 1 = 1,\ldots,n+1 .$$

La suite $\{d^k\}$ étant croissante et bornée supérieurement, converge vers une valeur $\tilde{d}$; on a donc :

$$\lim_{k\to\infty} d(I^{k+1}, I^k) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{k\to\infty} I^k = \tilde{I} = (\tilde{d},0,\ldots,0)$$

mais I^k est dans $[X_1^k,\ldots,X_{n+1}^k]$ d'où :

$$\lim_{k\to\infty} d(I^{k+1}, [X_1^k,\ldots,X_{n+1}^k]) = 0$$

et par suite $p \leq n-1$.

2.1) Si $p = n-1$.

On a alors :

$$d(I^{k+1},[x_j^k ; j=1,\ldots,n+1, j\neq j_o^k]) \geq \eta$$

donc :

$$d(I^{k+1},U^k) \geq \eta$$

et

$$\rho^{k+1} \geq \frac{\eta}{d(Z^{k+1},U^k)}$$

L'ensemble Γ étant borné dans $\mathbb{R}^{n+1}$, $d(Z^{k+1},U^k)$ est borné supérieurement ; il existe donc $s > 0$ tel que :

$$0 < s < \rho^{k+1}$$

De la relation :

$$\bar{d}^k - d^k = (\rho^{k+1})^{-1}(d^{k+1} - d^k)$$

on déduit :

$$\bar{d}^k - d^k \leq s^{-1}(d^{k+1} - d^k) .$$

La suite $\{d^k\}$ étant convergente, on a :

$$\lim_{k\to\infty} (\bar{d}^k - d^k) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{k\to\infty} d^k = \alpha$$

2.2) Si $0 \leq p < n-1$.

2.2.1) Supposons que : $\overline{\lim_{k\to\infty}} \rho^{k+1} = \beta > 0$

Soit $\{\rho^{\mu(k)+1}\}$ une sous suite telle que $\lim_{k\to\infty} \rho^{\mu(k)+1} = \beta$.

Il existe alors $\varepsilon > 0$ et un indice $\bar{k}$ tel que, pour tout $k > \bar{k}$ on ait :

$$\rho^{\mu(k)} \geq \beta - \varepsilon > 0 .$$

On en déduit :

$$\bar{d}^{\mu(k)} - d^{\mu(k)} \leq (\beta - \varepsilon)^{-1}(d^{\mu(k)+1} - d^{\mu(k)})$$

d'où :

$$\lim_{k\to\infty} (\bar{d}^{\mu(k)} - d^{\mu(k)}) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{k\to\infty} d^k = \alpha \quad .$$

2.2.2) Supposons maintenant que l'on ait :

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \rho^{k+1} = \lim_{k\to\infty} \rho^{k+1} = 0 \ .$$

Par définition de p, il existe une suite $\{F^{\varphi(k)}\}$ de faces, avec $F^{\varphi(k)}$ dans $F^{\varphi(k)}_{p+1}$, telle que :

$$\lim_{k\to\infty} d(I^{\varphi(k)+1}, [F^{\varphi(k)}]) = 0 \ .$$

(φ est une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ et on suppose que $F^{\varphi(k)} \neq F^{\varphi(k+1)}$).

Puisque $\lim_{k\to\infty} I^k = \tilde{I}$, on a aussi :

$$\lim_{k\to\infty} d(\tilde{I}, [F^{\varphi(k)}]) = 0 \ .$$

Quitte à en extraire une sous suite, on supposera que la suite $\{F^{\varphi(k)}\}$ est telle que $F^{\varphi(k+1)}$ n'appartient pas à $F^{\varphi(k)}_{p+1}$.

Chaque face $F^{\varphi(k+1)}$ contient donc un élément $Z^{\Psi(k)+1}$ avec $\varphi(k) \leq \Psi(k) \leq \varphi(k+1) - 1$ tel que $F^{\varphi(k+1)}$ ait pour sommets :

$$Z^{k'+1}, X^{k'}_{j_1}, \ldots, X^{k'}_{j_{p+1}} \quad (\text{avec } j_r \text{ dans } \{1,2,\ldots,n+1\} \ , \ r=1,\ldots,p+1).$$

(On pose pour simplifier $k' = \Psi(k)$).

De la convergence de I^k vers $\tilde{I}$ on déduit :

$$\lim_{k\to\infty} d(I^{k'+1}, [F^{\varphi(k+1)}]) = 0 \ .$$

De l'hypothèse $\lim \rho^{k+1} = 0$ et de la relation :

$$I^{k+1} - U^k = \rho^{k+1}(Z^{k+1}-U^k) \quad , \text{ on tire : } \lim_{k\to\infty} \|I^{k'+1}-U^{k'}\| = 0 .$$

On a donc aussi :

$$(1) \qquad \lim_{k\to\infty} d(U^{k'},[F^{\varphi(k+1)}]) = 0 .$$

Mais, par définition de p , on a :

$$d(I^{k'+1},[X_{j_1}^{k'},\ldots,X_{j_{p+1}}^{k'}]) \geq \eta$$

donc, à partir d'un certain rang, on aura aussi :

$$(2) \qquad d(U^{k'},[X_{j_1}^{k'},\ldots,X_{j_{p+1}}^{k'}]) \geq \frac{\eta}{2} .$$

Soit $U_p^{k'}$ la projection de $U^{k'}$ sur $[F^{\varphi(k+1)}]$.

De la relation (1) on déduit que :

$$\lim_{k\to\infty} (U_p^{k'} - U^{k'}) = 0 .$$

Pour k' suffisamment grand, d'après (1) et (2) $U^{k'}$ n'appartient pas à $[X_{j_1}^{k'},\ldots,X_{j_{p+1}}^{k'}]$ donc $Z^{k'+1}$ appartient à $[X_{j_1}^{k'},\ldots,X_{j_{p+1}}^{k'},U_p^{k'}]$ et :

$$\lim_{k\to\infty} d(Z^{k'+1},[X_{j_1}^{k'},\ldots,X_{j_{p+1}}^{k'},U^{k'}]) = 0 .$$

La variété $[X_{j_1}^{k'},\ldots,X_{j_{p+1}}^{k'},U^{k'}]$ étant contenue dans $H^{k'}$, on a :

$$\lim_{k\to\infty} d(Z^{k'+1},H^{k'}) = 0 .$$

Puisque $Z^{k'+1}$ appartient à $\bar{H}^{k'}$, la distance entre les deux hyperplans parallèles $H^{k'}$ et $\bar{H}^{k'}$ tend vers zéro lorsque k tend vers l'infini avec $\varphi(k) \leq k' \leq \varphi(k+1) - 1$.

On a la relation :

$$d(H^{k'},\bar{H}^{k'}) = \frac{\bar{d}^{k'} - d^{k'}}{\sqrt{1+\|x^{k'}\|^2}}$$

où $(1,-x^{k'})$ est orthogonal à $H^{k'}$.
La quantité $\|x^{k'}\|^2$ étant bornée (lemme 5.1) on déduit :

$$\lim_{k\to\infty} (\bar{d}^{k'}-d^{k'}) = 0 \quad \text{d'où} \quad \lim_{k\to\infty} (\|e^{\Psi(k)}\|-d^{\Psi(k)}) = 0$$

$$\text{et} \lim_{k\to\infty} d^{k} = \alpha \quad .$$

Q.E.D.

REMARQUES :

1°) Lorsque p = n-2 on peut montrer (C.CARASSO [14]) qu'il est impossible d'avoir $\lim_{k\to\infty} \rho^{k+1} = 0$.

2°) Pour avoir $p \geq 0$ il suffit de supposer que aucune fonctionnelles de l'adhérence faible de $E(S')$ ne s'annule sur $< f_1,\ldots,f_n >$. Dans le cas de l'approximation au sens du max dans l'espace des fonctions continues sur un compact K, il suffit de supposer que les fonctions $f_1,\ldots,f_n$ ne s'annulent pas toutes en un même point.

5.4 - PROGRAMMATION DE L'ALGORITHME DE REMES GENERALISE.

Nous avons vu au paragraphe 5.1 que l'algorithme de Rémès généralisé était un cas particulier de l'algorithme d'échange.

Si on note :

$$(P) \qquad \alpha = \|f - \sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i f_i\| = \min_{(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n} \|x - \sum_{i=1}^{n} x_i f_i\|$$

on a aussi, en posant $x = (x_1,\ldots,x_{n+1})$, $z = (0,\ldots,0,1)$,

$$c(t) = < f,t > \qquad a(t) = (< f_1,t > ,\ldots, < f_n,t >)$$

$$\alpha = \bar{x}_{n+1} = \text{Min}\,[(x|z)\,|\,c(t) \leq (x|[a(t),1]) \quad \forall t \in S'] \ .$$

On peut donc appliquer au problème (P) la même méthode de résolution qu'au chapitre 3.1. Le passage d'une étape k à une étape k+1 se fait en construisant un vecteur E de $\mathbb{R}^{n+1}$ et un scalaire $\bar{i}^k$ tel que :

$$\bar{i}^k = ([1,-x^k]|E) = \underset{t\in S'}{\text{Max}} \; ([1,x^k]|[c(t),a(t),1])$$

$$= ([1,-x^k]|[c(z^{k+1}),a(z^{k+1}),1])$$

Soit :

$$\bar{i}^k = \|f - \sum_{i=1}^{n} x_i^k f_i\| - x_{n+1}^k$$

et :

$$E_o = < f,z^{k+1} > \qquad E_i = < f_i,z^{k+1} > \qquad i=1,\ldots,n \qquad E_{n+1} = 1$$

avec :

$$\|f - \sum_{i=1}^{n} x_i^k f_i\| = < f - \sum_{i=1}^{n} x_i^k f_i, z^{k+1} >$$

Afin de déterminer le vecteur E on cherchera systématiquement l'élément z^{k+1} parmi les fonctionnelles extrémales de S'.

Le programme permettant de résoudre le problème (P) a la structure suivante en ALGOL W :

```
begin déclaration de la procédure ECHANGEDSRN du chapitre 3.
      integer N; affectation d'une valeur à N;
begin procédure NORME (real array X,E(*); real result IB);
      comment la procédure construit à partir de X(1),...,X(N)
      le vecteur E(0),...,E(N+1) et le scalaire IB = ī;

      begin  déclaration des éléments f,f1,...,fn et de tous les
             éléments permettant de définir l'espace vectoriel E
             et sa norme

             .
             .
             .
             .
             .
             .
             .
             .

      end NORME;
      real array X,Z(1::N+1); real D; logical ITERATIF;
      for I:=1 until N do Z(I):=0; Z(N+1):=1;
      ECHANGEDSRN(N+1,Z,NORME,'-5,100,X,D,ITERATIF);
      for I:=1 until N do
      WRITE("X(I)=",X(I));
      WRITE("distance de f à V =",D);
      WRITE ("l'algorithme est itératif. Réponse : ",ITERATIF)
   end
end.
```

Ce n'est donc qu'au niveau de la procédure NORME que l'on particularise l'espace vectoriel E et les éléments f et $f_1,\ldots,f_n$.

5.4 - ALGORITHME DE REMES GENERALISE AVEC CONTRAINTES PAR INEGALITE.

Considérons dans l'espace vectoriel normé E le convexe C défini par :

$$C = \{h \in E \mid \alpha(r) \leq < h,\beta(r) > \quad \forall r \in K\}$$

où K est un compact, α est une application continue de K dans $\mathbb{R}$ et une application continue de K dans E' le dual topologique de E muni de la topologie $\sigma(E',E)$.

Soit f un élément de E et V le sous espace vectoriel de dimension n engendré par $f_1,\ldots,f_n$.

On note H1 l'hypothèse :

H1 " il existe un élément g de V tel que :

$$\alpha(t) < < g,\beta(t) > \quad \forall t \in K \ ".$$

On cherche un élément $\bar{g}$ de $V \cap C$ tel que :

$$(P) \qquad \alpha = \|f-\bar{g}\| = \operatorname*{Min}_{g \in V \cap C} \|f-g\| \ .$$

Le problème (P) s'écrit aussi, en posant $\bar{g} = \sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i f_i$:

$$\alpha = \|f - \sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i f_i\| = \operatorname{Min} \left[\|f - \sum_{i=1}^{n} x_i f_i\| \,|\, \alpha(t) \leq < \sum_{i=1}^{n} x_i f_i, (t) > \quad \forall t \in K\right]$$

Posons, pour t dans S',

$$a'(t) = (< f_1,t > ,\ldots, < f_n,t >) \quad \text{élément de } \mathbb{R}^n \ ;$$

et pour r dans K :

$$a'(r) = (< f_1,\beta(r) > ,\ldots, < f_n,\beta(r) >) \quad \text{élément de } \mathbb{R}^n \ ;$$

$z = (0,1)$ et $x = (x_1,\ldots,x_n,x_{n+1})$ éléments de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$.

On a alors :

$$(P) \qquad \alpha = \bar{x}_{n+1} = \mathrm{Min}\,[(x|z)\,|\ < f,s > \leq (x|[a'(s),1]) \quad \forall s \in S'$$

$$\alpha(r) \leq (x|[a''(r),0]) \quad \forall r \in K]$$

S' désignant la boule unité du dual fort de E.

Notons B le compact $\{1,0\} \times S' \times K$ (muni de la topologie produit) et :

$$c : \quad B \to \mathbb{R}$$

$$(\eta,s,r) \mapsto \begin{cases} < f,s > & \text{si} \quad \eta = 1 \\ \alpha(r) & \text{si} \quad \eta = 0 \end{cases}$$

$$a : \quad B \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$$

$$(\eta,s,r) \mapsto \begin{cases} [a'(s),\eta] & \text{si} \quad \eta = 1 \\ [a''(r),\eta] & \text{si} \quad \eta = 0 \end{cases}$$

Le problème (P) s'écrit alors :

$$(P) \qquad \alpha = \mathrm{Min}\,[(x|z)\,|\,c(t) \leq (x|a(t)) \quad \forall t \in B]$$

L'algorithme d'échange appliqué au problème (P) est alors le suivant :

A l'étape k on dispose de n+1 éléments $u_j^k = (c(t_j^k),a(t_j^k))$ $j=1,\ldots,n$ (avec t_j^k dans B) et de n+1 coefficients $\rho_j^k > 0$ tels que :

$$(d^k,z) = \sum_{j=1}^{n+1} \rho_j^k u_j^k$$

Les éléments t_j^k sont de la forme :

$$t_j^k = (\eta_j^k,s_j^k,r_j^k)$$

avec η_j^k dans $\{0,1\}$, r_j^k dans S' et s_j^k dans K .

Posons :

$$I^k = \{j \in \{1,\ldots,n+1\} \mid \eta_j^k = 1\}$$

et

$$J^k = \{j \in \{1,\ldots,n+1\} \mid \eta_j^k = 0\}$$

On a alors :

$$(d^k,0,1) = \sum_{j\in I^k} \rho_j^k(<f,s_j^k>,a'(s_j^k),1) + \sum_{j\in J^k} \rho_j^k(\alpha(r_j^k),a''(r_j^k),0)$$

Soit :

$$d^k = \sum_{j\in I^k} \rho_j^k <f,s_j^k> + \sum_{j\in J^k} \rho_j^k \alpha(r_j^k)$$

$$0 = \sum_{j\in I^k} \rho_j^k(<f_1,s_j^k>,\ldots,<f_n,s_j^k>) + \sum_{j\in J^k} \rho_j^k(<f_1,\beta(r_j^k)>,\ldots,$$

$$<f_n,\beta(r_j^k)>)$$

Cette dernière relation revient à dire que la fonctionnelle :

$$L = \sum_{j\in I^k} \rho_j^k s_j^k + \sum_{j\in J^k} \rho_j^k \beta(r_j^k)$$

s'annule sur V .

On a enfin :

$$1 = \sum_{j\in I^k} \rho_j^k$$

ce qui entraine que I^k est toujours non vide.

On détermine l'élément x^k de $\mathbb{R}^{n+1}$ tel que :

$$(a(t_j^k) \mid x^k) = c(t_j^k) \qquad j=1,\ldots,n+1$$

Pour passer à l'étape k+1 on détermine un élément z^{k+1} de $\{1,0\} \times S' \times K = B$ tel que :

$$\bar{i}^k = c(z^{k+1}) - (x^k | a(z^{k+1})) = \operatorname{Max}_{t \in B} [c(t) - (x^k | a(t))]$$

où :

$$\bar{i}^k = \operatorname{Max} \left(\operatorname{Max}_{t \in \{1\} \times S' \times K} [c(t) - (x^k | a(t))] ; \operatorname{Max}_{t \in \{0\} \times S' \times K} [c(t) - (x^k | a(t))] \right)$$

soit :

$$\bar{i}^k = \operatorname{Max} \left\{ \left\| f - \sum_{i=1}^{n} x_i^k f_i \right\| - x_{n+1}^k \; ; \; \operatorname{Max}_{s \in K} \left[\alpha(s) - < \sum_{i=1}^{n} x_i^k f_i , \beta(s) > \right] \right\}$$

En posant $g^k = \sum_{i=1}^{n} x_i^k f_i$, on a :

$$\bar{i}^k = \operatorname{Max} \left\{ \left\| f - g^k \right\| - x_{n+1}^k \; ; \; \operatorname{Max}_{r \in K} [\alpha(r) - < g^k , (r) >] \right\}$$

On pose $\bar{i}^k = \bar{d}^k - d^k$.

a) Si

$$\bar{i}^k = \left\| f - g^k \right\| - x_{n+1}^k$$

on doit alors avoir :

$$c(z^{k+1}) - (x^k | a(z^{k+1})) = \left\| f - g^k \right\| - x_{n+1}^k$$

On pose alors :

$$Z^{k+1} = (c(z^{k+1}), a(z^{k+1})) = (< f, \bar{s}^k >, < f_1, \bar{s}^k >, \ldots, < f_n, \bar{s}^k >, 1)$$

avec $\bar{s}^k$ élément de S' tel que :

$$\left\| f - g^k \right\| = < f - g^k, \bar{s}^k >$$

On choisit en pratique, comme dans 5.4, l'élément $\bar{s}^k$ parmi les fonctionnelles extrémales de S'.

b) Si

$$\bar{i}^k = \underset{r\in K}{\text{Max}} \left[\alpha(r) - < g^k, \beta(r) >\right]$$

on pose alors :

$$Z^{k+1} = (c(z^{k+1}), a(z^{k+1})) = (\alpha(\bar{r}^k), < f_1, \beta(\bar{r}^k) >, \ldots, < f_n, \beta(\bar{r}^k) > 0)$$

avec $\bar{r}^k$ défini par :

$$\alpha(\bar{r}^k) - < g^k, \beta(\bar{r}^k) > = \underset{r\in K}{\text{Max}} \left[\alpha(r) - < g^k, \beta(r) >\right]$$

On échange Z^{k+1} avec un élément $u^k_{j^k_o}$ de façon à avoir :

$$z = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq j^k_o}}^{n} \rho_j^{k+1} a(t_j^k) + \rho^{k+1}_{j^k_o} a(z^{k+1})$$

On a la proposition :

PROPOSITION 5.2 :

Si les hypothèses suivantes sont vérifiées :

H1 " il existe g^* dans V tel que :

$$\alpha(t) < < g^*, \beta(t) > \quad \forall t \in K \ " .$$

H2 " il existe un ensemble M de n+1 éléments de $E(S') \cup \beta(K)$ tels que, quels que soient $t_1, \ldots, t_n$ de M le déterminant

$$\det [< f_i, t_j >]$$

est différent de zéro " .

H3 " l'algorithme est itératif ($\rho_j^k > 0 \quad \forall k$ et $\forall j = 1, \ldots, n$) ".

alors :

i) $\lim_{k\to\infty} d^k = \alpha$

ii) il existe une sous suite $d\{^{\Psi(k)}\}$ de $\{d^k\}$ telle que :

$$\lim_{k\to\infty} (\bar{d}^{\Psi(k)} - d^{\Psi(k)}) = 0$$

DEMONSTRATION :

On applique le théorème 2.1. L'hypothèse H1 de ce théorème revient à dire qu'il existe x^* de $\mathbb{R}^{n+1}$ tel que :

$$< f,s > < < x^*,[a(s),1] > \quad \forall s \in S'$$

et

$$\alpha(r) < < x^*,[a''(r),0] > \quad \forall r \in K,$$

soit, en posant : $g^* = \sum_{i=1}^{n} x_i^* f_i$

$$\|f-g^*\| < x_{n+1}^*$$

$$\alpha(r) < < g^*,\beta(r) > \quad \forall r \in K,.$$

La première inéquation est trivialement vérifiée en prenant x_{n+1}^* suffisamment grand, la deuxième est vérifiée d'après l'hypothèse H1.

L'hypothèse H2 entraine que l'hypothèse H2 du théorème 2.1 est vérifiée (même technique de démonstration qu'en 5.1).

Q.E.D.

APPLICATION A L'APPROXIMATION GLOBALE AU SENS DU MAX D'ENSEMBLE DE FONCTIONS PAR UN ELEMENT D'UN SOUS ESPACE VECTORIEL SITUE AU-DESSUS D'UNE FONCTION DONNEE.

On considère dans $C[a,b]$ un ensemble compact Q de fonctions dérivables sur $[a,b]$, soit V le sous espace vectoriel de $C[a,b]$ engendré par n fonctions $f_1,\ldots,f_n$ dérivables. Soit g une fonction dérivable sur un intervalle $[c,d]$ contenu dans $[a,b]$.

On note C l'ensemble :

$$C = \{h \in C[a,b] \mid g(t) \leq h(t) \text{ pour tout } t \text{ dans } [c,d]\}$$

On cherche un élément $\bar{g}$ de $V \cap C$ approchant globalement au sens du max, l'ensemble Q de fonctions, soit :

$$(P) \qquad \alpha = \operatorname*{Max}_{h\in Q} \operatorname*{Max}_{t\in[a,b]} |h(t)-\bar{g}(t)| = \operatorname*{Min}_{g\in V\cap C} \operatorname*{Max}_{h\in Q} \operatorname*{Max}_{t\in[a,b]} |h(t)-g(t)|$$

Si l'on note B l'espace $C[a,b]$ et $C(Q;B)$ l'espace des applications continues de Q dans B muni de la norme :

$$|||H||| = \operatorname*{Max}_{q\in Q} \|H(q)\| \quad \text{avec} \quad \|h\| = \operatorname*{Max}_{t\in[a,b]} |h(t)|$$

le problème (P) peut s'écrire (voir paragraphe 4.3) :

$$\alpha = |||I - \sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i F_i||| = \operatorname{Min} [|||I - \sum_{i=1}^{n} x_i F_i||| \mid g(t) \leq < \sum_{i=1}^{n} x_i F_i, \delta_{q,t} > \quad \forall (q,t) \in Q \times [c,d]\}$$

avec I et F_i $i=1,\ldots,n$ applications constantes de Q dans B définies par :

$$I : q \mapsto q \qquad F_i : q \mapsto f_i$$

et $\delta_{q,t}$ fonctionnelle linéaire continue sur l'espace vectoriel de $C(Q;B)$ engendré par $F_1,\ldots,F_n$:

$$\delta_{q,t} : H \mapsto H(q)(t) .$$

On a un problème qui se formule comme en 5.5.

La mise en oeuvre de l'algorithme d'échange ne nécessite que le calcul, à chaque étape k de :

$$\bar{i}^k = \text{Max} \{ \left\| I - \sum_{i=1}^{n} x_i^k F_i \right\| - x_{n+1}^k \; ; \; \max_{(q,t)\in Q\times[c,d]} [g(t)-(x^k|h(q,t))] \}$$

avec :

$$h(q,t) = (< F_1, \delta_{q,t} > , \ldots , < F_n, \delta_{q,t} >)$$

où :

$$h(q,t) = (f_1(t), \ldots, f_n(t))$$

Soit :

$$\bar{i}^k = \text{Max} \{ \max_{h\in Q} \| h - \sum_{i=1}^{n} x_i^k f_i \| - x_{n+1}^k ; \max_{t\in[c,d]} (g(t) - \sum_{i=1}^{n} x_i^k f_i(t)) \}$$

Si :

$$\bar{i}^k = \max_{h\in Q} \| h - \sum_{i=1}^{n} x_i^k f_i \| - x_{n+1}^k = \| \bar{h} - \sum_{i=1}^{n} x_i f_i \| - x_{n+1}^k$$

$$= | \bar{h}(\bar{t}) - \sum_{i=1}^{n} x_i^k f_i(\bar{t}) | - x_{n+1}^k$$

le point de $\mathbb{R}^{n+2}$ à échanger sera :

$$Z^{k+1} = (\bar{s}\ \bar{h}(\bar{t}), \bar{s} f_1(\bar{t}), \ldots, \bar{s} f_n(\bar{t}), 1)$$

avec :

$$\bar{s} = \text{signe} \, (\bar{h}(\bar{t}) - \sum_{i=1}^{n} x_i^k f_i(\bar{t}))$$

Si :

$$\bar{i}^k = \max_{t\in[c,d]} (g(t) - \sum_{i=1}^{n} x_i^k f_i(t)) = g(t^*) - \sum_{i=1}^{n} x_i^k f_i(t^*)$$

le point à échanger sera :

$$Z^{k+1} = (g(t^*), f_1(t^*), \ldots, f_n(t^*), 0) \; .$$

Le programme ALGOL W aura la structure suivante :

```
begin procédure ECHANGEDSRN (voir chapitre 3);
      integer N;
      affectation d'une valeur à N;
      begin procedure GLOBAL CONTR (real array X,E(*);
            real result IB);
            comment la procédure construit à partir de X(1),...,X(N) le
            vecteur E=Z^{k+1}(E(0),...,E(N+1)) et le scalaire IB=ī;
            begin déclaration de Q,g,f,f_1,...,f_n,[a,b],[c,d]
            .
            .
            .
            .
            .
            .
            .
            end GLOBAL CONTR;
            real array X,Z(1::N+1); real D; logical ITERATIF;
            for I:=1 until N do Z(I):=0; Z(N+1):=1;
            ECHANGEDSRN(N+1,Z,GLOBAL CONTR,'-5,100,X,D,ITERATIF);
            for I:=1 until N do
            WRITE("X(I)=",X(I));
            WRITE("distance de Q à V intersection C",D);
            WRITE("l'algorithme est itératif. Réponse:",ITERATIF)
      end
end.
```

REMARQUE :

Dans le cas de problème d'approximation, l'ensemble $\{< f_1,t >,\ldots,< f_n,t > | t \in E(S')\}$ étant symétrique, il peut être difficile de choisir "artificiellement" les points de départ $U(i,j)$ $(i=0,\ldots,n$; $j=1,\ldots,n+1)$ de l'algorithme d'échange. Ces point doivent en effet s'éliminer après quelques itérations (chapitre 3). Une autre méthode est applicable dans ce cas là, il suffit de considérer n+1 éléments t_j $(j=1,\ldots,n+1)$ de $E(S')$ tels que toutes les sous matrices d'ordre n de la matrice formée des éléments $< f_i,t_j >$ $(i=1,\ldots,n$; $j=1,\ldots,n+1)$ soient de rang n .

On résoud alors le système linéaire :

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j < f_i, t_j > = - < f_i, t_{n+1} > \qquad i=1,\ldots,n$$

L'hypothèse sur le choix des t_j entraine : $\lambda_j \neq 0 \qquad j=1,\ldots,n$

On pose :

$$t_j^o = \text{signe } \lambda_j . t_j \qquad j=1,\ldots,n \; ; \qquad t_{n+1}^o = t_{n+1}$$

$$\rho_j^o = \frac{|\lambda_j|}{\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| + 1} \qquad j=1,\ldots,n \; ; \qquad \rho_{n+1}^o = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| + 1}$$

On prend alors comme points de départ de l'algorithme d'échange :

$$\left.\begin{array}{l} U(0,j) = < f, t_j^o > \\ U(i,j) = < f_i, t_j^o > \qquad i=1,\ldots,n \; ; \end{array}\right\} \quad j=1,\ldots,n+1$$

avec les coefficients :

$$RO(j) = \rho_j^o \qquad j=1,\ldots,n+1 \; .$$

Ces points ne sont plus "artificiels" car de la forme $(c(t_j^o), a(t_j^o))$ avec t_j^o dans $E(S')$.

CHAPITRE 6

ALGORITHME D'ECHANGE GENERALISE

Nous avons décrit, dans le chapitre 2, l'algorithme d'échange en supposant qu'il est "itératif". Cette hypothèse revient à supposer qu'un déterminant est à chaque étape différent de zéro. Nous montrons dans ce chapitre comment l'on peut modifier l'algorithme d'échange pour qu'il converge sans faire d'hypothèse d'"itérativité". Notre étude est à rapprocher de celle de TÖPFER [64] sur l'algorithme de Rémès sans condition de Haar.

6.1 - DESCRIPTION DE L'ALGORITHME D'ECHANGE GENERALISE.

On considère dans $\mathbb{R}^n$ un élément fixe z, un convexe

$$C = \{x \in \mathbb{R}^n \mid c(s) \leq (x|a(s)) \ , \ \forall s \in S\}$$

où S est un compact,
c est une application continue de S dans $\mathbb{R}$ et
a une application continue de S dans $\mathbb{R}^n$.

On note V_t le translaté d'un sous espace vectoriel V de $\mathbb{R}^n$ de dimension p. On note $V_t = V+\tilde{x}$.

On considère le problème de minimisation :

(P) $\alpha = \mathrm{Inf}\,[(x|z) \,|\, x \in C \cap V_t]$

Nous ferons (voir chapitre 1) les hypothèses :

H0 " α est fini "

H1 " Il existe x^* dans V_t tel que $c(s) < (x|a(s))$ pour tout s dans S " .

H2 " $(V^o+z) \cap$ intérieur $cc(a(S)) \neq \emptyset$ " .

On a alors (chapitre 1) :

(Q) $\alpha = -\beta = (\tilde{x}|z) + \mathrm{Max}\,[r-(\tilde{x}|\ell) \,|\, (r,\ell) \in cc(j(S)) \cap \mathbb{R} \times (V^o+z)]$

et le problème (P) a au moins une solution.

Le sous espace V étant de dimension égale à p, on a (proposition 1.2) :

$$-\beta = (\tilde{x}|z) + \mathrm{Max}\,\Big[\sum_{i=1}^{r} \rho_i c(s_i) - (\tilde{x}|\sum_{i=1}^{r} \rho_i a(s_i))\Big|$$

$$1 \leq r \leq p \;;\; \rho_i > 0 \;;\; s_i \in S \;;\; \sum_{i=1}^{r} \rho_i a(s_i) - z \in V^o]$$

L'algorithme d'échange se décrit alors de la façon suivante :

<u>à l'étape k</u> :

On dispose (comme dans l'algorithme d'échange itératif) de p points $s_1^k,\ldots,s_p^k$ de S et de p coefficients $\rho_1^k,\ldots,\rho_p^k$ tels que :

$$\sum_{i=1}^{p} \rho_i^k a(s_i^k) - z \in V^o \qquad \text{et} \qquad \rho_i^k \geq 0 \;.$$

On pose :

$$d^k = \sum_{i=1}^{p} \rho_i^k [c(s_i^k) - (\tilde{x}|a(s_i^k))] \;;$$

$$I^k = \{i \in \{1,\ldots,p\} \mid \rho_i^k > 0\} \quad ;$$

$$V_t^k = \{x \in V_t \mid c(s_i^k) = (x \mid a(s_i^k)) \ , \ i \in I^k\}$$

et on considère le problème de minimisation suivant qui définit $\bar{d}^k$:

$$(P^k) \qquad \bar{d}^k - d^k = \operatorname{Min}_{x \in V_t^k} \ \operatorname{Max}_{s \in S} \left[c(s) - (x \mid a(s))\right]$$

REMARQUE :

d^k est la valeur du minimum du problème (P) avec $C = \{s_1^k,\ldots,s_p^k\}$.

On a :

LEMME 6.1 :

En notant x'^k un élément de V_t^k et en posant :

$$V^k = V_t^k - x'^k \quad \text{on a :}$$

$$(Q^k) \qquad \bar{d}^k - d^k = \operatorname{Max}\left[r - (x'^k \mid \ell) \mid (r,\ell) \in \operatorname{co}(j(S)) \cap \mathbb{R} \times (V^k)^o\right]$$

DEMONSTRATION :

Le problème (P^k) peut s'écrire :

$$\bar{d}^k - d^k = \operatorname{Min}\left[([x,d] \mid [0,1]) \mid c(s) \leq ([x,d] \mid [a(s),1]\right) ;$$

$$[x,d] \in V^k \times \mathbb{R} + (x'^k,0)] \quad .$$

On a un problème d'optimisation de même nature que le problème (P). Nous appliquons la formule de dualité (Q) en vérifiant les hypothèses H0, H1 et H2.

La quantité $\bar{d}^k - d^k$ étant positive, l'hypothèse H0 est vérifiée.

Pour vérifier H1 il suffit de considérer un élément x^* de V_t^k et

un élément d^* de $\mathbb{R}$ tel que :

$$\operatorname{Max}_{s\in S} [c(s)-(x^*|a(s))] < d^* .$$

On a alors (x^*,d^*) qui appartient à $V^k \times \mathbb{R} + (x'^k,0)$ et qui vérifie :

$$c(s) < ([x^*,d^*] [a(s),1]) \text{ pour tout } s \text{ dans } S .$$

L'hypothèse H2 s'écrit dans ce cas :

$$0 \in \text{ir} [V^{k\circ} \times \{1\} - cc(a(S),1)]$$

soit :

$$(V^k)^\circ \cap \text{ir co}(a(S)) \neq \emptyset .$$

D'après l'hypothèse H2 du problème (P) initial, il existe x' dans V° tel que :

$$x'+z \in \text{ir } cc(a(S))$$

On a par ailleurs :

$$-\sum_{i=1}^{p} \rho_i^k a(s_i^k) + z = x'' \in V^\circ$$

d'où :

$$x'+x'' \in \text{ir } cc(a(S))$$

et

$$V^\circ \cap \text{ir co}(a(S)) \neq \emptyset .$$

Le sous espace V^k étant contenu dans V on a :

$$(V^k)^\circ \cap \text{ir co}(a(S)) \neq \emptyset$$

l'hypothèse H2 est donc vérifiée.

En appliquant la formule de dualité (Q) on obtient :

$$\bar{d}^k - d^k = ([x'^k, 0] | [0,1]) + \text{Max}\,[r - ([x'^k, 0] | [\ell_1, \ell_2]) \mid$$

$$(r, \ell_1, \ell_2) \in cc(j(S) \times \{1\}) \cap \mathbb{R} \times (V^k)^\circ \times \{1\}]$$

où :

$$\bar{d}^k - d^k = \text{Max}\,[\sum_{i=1}^{r} \rho_i c(s_i) - (x'^k | \sum_{i=1}^{r} \rho_i a(s_i)) |\ 1 \leq r \leq p\ ;$$

$$\sum_{i=1}^{r} \rho_i = 1 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{r} \rho_i a(s_i) \in (V^k)^\circ]$$

soit :

$$\bar{d}^k - d^k = \text{Max}\,[r - (x'^k | \ell) | (r, \ell) \in co(j(S)) \cap \mathbb{R} \times (V^k)^\circ]\ .$$

Q.E.D.

PASSAGE A L'ETAPE k+1 :

Par définition de $\bar{d}^k - d^k$ et de V_t^k, on a toujours :

$$\bar{d}^k - d^k \geq 0$$

PREMIER CAS : $\bar{d}^k - d^k = 0$.

On pose alors, conventionnellement :

$$s_j^{k+1} = s_j^k \quad \text{et} \quad \rho_j^{k+1} = \rho_j^k \qquad (j=1,\ldots,p)$$

ce qui entraine :

$$V_t^{k+1} = V_t^k\ .$$

REMARQUE :

Dans la pratique on arrête l'algorithme.

DEUXIEME CAS : $\bar{d}^k - d^k > 0$.

On note (r^k, ℓ^k) un élément de co $j(S) \cap \mathbb{R} \times (V^k)^o$ tel que :

$$\bar{d}^k - d^k = r^k - (x'^k | \ell^k)$$

Soient z_i^{k+1} élément de S et $\lambda_i^{k+1} \geq 0 \quad (i \in N^k)$ tels que :

$$r^k = \sum_{i \in N^k} \lambda_i^{k+1} c(z_i^{k+1})$$

$$\ell^k = \sum_{i \in N^k} \lambda_i^{k+1} a(z_i^{k+1}) \qquad \left(\sum_{i \in N^k} \lambda_i^{k+1} = 1 \right)$$

On détermine un indice j_o^k de I^k tel que l'on ait :

$$cc(\ell^k, a(s_i^k)) : i \in I^k - \{j_o^k\}) \cap V^o + z \neq \emptyset$$

Plus précisément $\sum_{i \in I^k - j_o^k} \rho_i^{k+1} a(s_i^k) + m^{k+1} \ell^k - z \in V^o \qquad \rho_i^{k+1} \geq 0$ et $m^{k+1} > 0$.

On pose alors :

$$\{s_i^{k+1}, \ldots, s_p^{k+1}\} = \{s_i^k \mid i \in I^k - \{j_o^k\}\} \cup \{z_i^{k+1} \mid i \in N^k\}$$

REMARQUES :

1) Lorsque l'algorithme est itératif on a :

$I^k = \{1, \ldots, p\}$; $V_t^k = \{x^k\}$; l'ensemble $\{z_i^k \mid i \in N^k\}$ se réduit à un élément z^{k+1} .

2) La détermination à l'étape k de l'élément (r^k, ℓ^k) nécessite la résolution du problème (P^k) qui est de même nature que le problème initial (P) mais dans un espace de dimension moindre que V_t. L'algorithme est donc récursif.

3) On a :

card N^k = p-card $I^k + 1$.

6.2 - CONVERGENCE DE L'ALGORITHME.

LEMME :

La suite d^k est croissante bornée supérieurement par $(x^*-\tilde{x}|z)$ et vérifie :

$$d^{k+1}-d^k = m^{k+1}(\bar{d}^k-d^k)$$

DEMONSTRATION :

De la relation :

$$(1) \qquad \sum_{i\in I^k-j_o^k} \rho_i^{k+1} a(s_i^k) + m^{k+1}\ell^k - z \in V^o$$

on tire (par définition de d^{k+1}) :

$$d^{k+1} = \sum_{i\in I^k-j_o^k} \rho_i^{k+1}[c(s_i^k)-(\tilde{x}|a(s_i^k))] + m^{k+1}[r^k-(\tilde{x}|\ell^k)]$$

où , x'^k appartenant à V_t^k :

$$d^{k+1} = \sum_{i\in I^k-j_o^k} \rho_i^{k+1}[(x'^k-\tilde{x}|a(s_i^k))] + m^{k+1}[r^k-(x'^k|\ell^k)]$$
$$+ m^{k+1}(x'^k-\tilde{x}|\ell^k).$$

L'élément $x'^k-\tilde{x}$ appartenant à V, on tire en tenant compte de la relation (1) :

$$d^{k+1} = m^{k+1}[r^k-(x'^k|\ell^k)] + (x'^k-\tilde{x}|z)$$

On a aparailleurs :

$$\sum_{i\in I^k} \rho_i^k a(s_i^k)-z = x'' \in V^o$$

d'où :

$$(x'^k - \tilde{x} | z) = (x'^k - \tilde{x} \mid \sum_{i \in I^k} \rho_i^k a(s_i^k))$$

et, x'^k appartenant à V_t^k :

$$(x'^k - \tilde{x} | z) = \sum_{i \in I^k} \rho_i^k [c(s_i^k) - (\tilde{x} | a(s_i^k))] = d^k$$

On a donc, en tenant compte de la définition de (r^k, ℓ^k) :

$$d^{k+1} - d^k = m^{k+1}(\bar{d}^k - d^k)$$

Le coefficient m^{k+1} étant strictement positif et $\bar{d}^k - d^k$ étant positif, la suite $\{d^k\}$ est croissante.

De la relation (hypothèse H1) :

$$c(s) < (x^* | a(s)) \ , \ \forall s \in S$$

on tire :

$$d^k = \sum_{i \in I^k} \rho_i^k [c(s_i^k) - (\tilde{x} | a(s_i^k))] < (x^* - \tilde{x} \mid \sum_{i \in I^k} \rho_i^k a(s_i^k) - z) + (x^* - \tilde{x} | z)$$

mais, $x^* - \tilde{x}$ appartient à V d'où :

$$d^k < (x^* - \tilde{x} | z) \ .$$

Q.E.D.

LEMME 6.3 :

S'il existe $s > 0$ tel que :

$$0 < s \leq m^{k+1}$$

alors :

$$\lim_{k \to \infty} (\bar{d}^k - d^k) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{k \to \infty} d^k + (\tilde{x} | z) = \alpha \ .$$

DEMONSTRATION :

D'après le lemme 6.2 on a :

$$\bar{d}^k - d^k \leq \frac{1}{s} \ (d^{k+1} - d^k)$$

La suite $\{d^k\}$ étant croissante et bornée supérieurement converge, on a donc :

$$\lim_{k\to\infty} (\bar{d}^k - d^k) = 0 \ .$$

Montrons que $\lim_{k\to\infty} d^k = \alpha$.

D'après la formule de dualité (Q), on a :

$$d^k \leq \alpha - (\tilde{x}|z)$$

Supposons que l'on ait $\lim_{k\to\infty} d^k = \tilde{d} < \alpha - (\tilde{x}|z)$.

Le problème (Q) ayant une solution, il existe d tel que :

$$d = \sum_{i=1}^{p} \rho_i [c(s_i) - (\tilde{x}|a(s_i))]$$

avec :

$$\sum_{i=1}^{p} \rho_i a(s_i) - z \in V^o \quad \text{et} \quad \rho_i \geq 0 \quad (i=1,\ldots,p) \ .$$

et

$$\alpha = d + (\tilde{x}|z)$$

Posons :

$$\tilde{d} - d = \mu > 0 \ .$$

Il existe $\bar{s}$ dans S tel que :

$$c(\bar{s}) - (x'^k \ a(\bar{s})) \geq \frac{\mu}{\sum_{i=1}^{p} \rho_i} \quad \text{pour tout } k$$

(Sinon il existerait k_o vérifiant

$$c(s) - (x'^{k_o} | a(s)) < \frac{\mu}{\sum_{i=1}^{p} \rho_i}$$

et on aurait :

$$\sum_{i=1}^{p} \rho_i [c(s_i) - (x'^{k_o} | a(s_i))] = \sum_{i=1}^{p} \rho_i [c(s_i) - (\tilde{x} | a(s_i))] - \sum_{i=1}^{p} \rho_i \, (x'^{k_o} - \tilde{x} | a(s_i))$$

$$= d - d^{k_o} < \mu \ ) \ .$$

On a alors :

$$\bar{d}^k - d^k = \operatorname{Min}_{x \in V_t} \operatorname{Max}_{s \in S} [c(s) - (x | a(s))] \geq \frac{\mu}{\sum_{i=1}^{p} \rho_i}$$

On ne peut alors avoir :

$$\lim_{k \to \infty} (\bar{d}^k - d^k) = 0$$

On a donc :

$$\lim_{k \to \infty} d^k = \alpha - (\tilde{x} | z) \ .$$

Q.E.D.

THEOREME 6.1 :

Les hypothèses H1 et H2 étant vérifiées, la suite $\{d^k\}$ construite par l'algorithme d'échange général est telle que :

i) $\lim_{k\to\infty} d^k + (\tilde{x}|z) = \alpha$

ii) il existe une sous suite $\{d^{\Psi(k)}\}$ de $\{d^k\}$ telle que :

$$\lim_{k\to\infty} (\bar{d}^{\Psi(k)} - d^{\Psi(k)}) = 0 .$$

DEMONSTRATION :

Si à une étape de l'algorithme on a :

$$\bar{d}^k - d^k = 0$$

alors, si x est un élément de V_t^k on a :

$$\text{Max}_{s\in S} [c(s) - (x|a(s))] = 0$$

donc x appartient à $C \cap V_t$.

On a aussi :

$$\sum_{i=1}^{p} \rho_i^k c(s_i^k) = (x| \sum_{i=1}^{p} \rho_i^k a(s_i^k))$$

en appliquant la proposition 1.3, on a x qui est solution de (P) et $d^k = \alpha$.

On suppose maintenant que, pour tout k on a $d^k < d^{k+1}$.

S'il existe $\mu > 0$ tel que pour tout k on ait $\mu < \rho_i^k$ $(i=1,\ldots,p)$, alors m^{k+1} est aussi borné inférieurement par un scalaire strictement positif. En appliquant le lemme 6.3 le théorème est démontré.

Supposons que pour tout $\mu > 0$ on puisse trouver des indices i et k tels que $\rho_i^k < \mu$.

En utilisant la même méthode que dans la démonstration du théorème 2.1, on peut extraire de $\{\rho_i^k\}$ une sous suite $\{\rho_i^{\varphi(j)}\}$ telle que :

$$\lim_{j\to\infty} \rho_i^{\varphi(j)} = 0 \quad \text{si} \quad i \in I_o \subset \{1,\ldots,p\}$$

et

$$\lim_{j\to\infty} \rho_i^{\varphi(j)} = \rho_i \geq \mu > 0 \quad \text{si} \quad i \in I_1 = \{1,\ldots,p\} - I_o$$

avec I_1 non vide.

On a évidemment $I_1 \subset I^{\varphi(j)} \quad \forall j$.

On ne peut avoir, pour j fixé l'inclusion :

$$\{s_i^{\varphi(j')} \mid i \in I_1\} \subset \{s_i^{\varphi(j)} \mid i=1,\ldots,p\} \qquad \forall j' > j$$

Si ce n'était pas le cas on aurait :

$$\lim_{j'\to\infty} \Big(\sum_{i\in I_o} \rho_i^{\varphi(j')} a(s_i^{\varphi(j')}) + \sum_{i\in I_1} \rho_i^{\varphi(j')} a(s_i^{\varphi(j)}) \Big)$$

$$= \sum_{i\in I_1} \rho_i \, a(s_i^{\varphi(j)})$$

avec $\sum_{i\in I_1} \rho_i \, a(s_i^{\varphi(j)})$ élément de $V^o + z$

on aurait donc

$$I_1 = I^{\varphi(j)} \quad \text{et} \quad \rho_i = \rho_i^{\varphi(j)} .$$

De même, de la relation :

$$\tilde{d} = \lim_{k\to\infty} d^{\varphi(j')} = \sum_{i\in I_1} \rho_i [c(s_i^{\varphi(j)}) - (\tilde{x} \mid a(s_i^{\varphi(j)}))]$$

on tirerait :

$$\tilde{d} = d^{\varphi(j')}$$

ce qui est impossible car $d^k < d^{k+1}$ pour tout k .

Quitte à en extraire une sous suite, on suppose que $\{s_i^{\varphi(j+1)} | i \in I_1\}$ contient au moins un élément nouveau par rapport à l'ensemble $\{s_i^{\varphi(j)} | i=1,\ldots,p\}$.

On suppose que ce point nouveau fait partie de l'ensemble des points $z_i^{\Psi(j)+1}$ $(i \in N^{\Psi(j)})$ introduits à l'étape $\Psi(j)$ $(\varphi(j) \leq \Psi(j) < \varphi(j+1))$.

On note e(j) l'ensemble des indices i de I_1 tels que

$$s_i^{\varphi(j+1)} = z_i^{\Psi(j)+1}$$

(on a $e(j) \subset N^{\Psi(j)}$) .

On a donc :

$$s_i^{\varphi(j+1)} = \begin{cases} s_i^{\Psi(j)} & \text{si} \quad i \notin e(j) \\ z^{\Psi(j)+1} & \text{si} \quad i \in e(j) \end{cases} \qquad i \in I_1$$

De la relation :

$$d^{\varphi(j+1)} = \sum_{i \in I_0} \rho_i^{\varphi(j+1)} [c(s_i^{\varphi(j+1)}) - (\tilde{x} | a(s_i^{\varphi(j+1)})]$$

$$+ \sum_{i \in I_1} \rho_i^{\varphi(j+1)} [c(s_i^{\varphi(j+1)}) - (\tilde{x} | a(s_i^{\varphi(j+1)}))]$$

on déduit, en notant $x^{\Psi(j)}$ un élément de $V_t^{\Psi(j)}$ vérifiant

$$c(z_i^{\Psi(j)+1}) - (x^{\Psi(j)} | a(z_i^{\Psi(j)+1})) = \bar{d}^{\Psi(j)} - d^{\Psi(j)} \qquad i \in N^{\Psi(j)}$$

et en retranchant :

$$d^{\Psi(j)} = (x^{\Psi(j)} - \tilde{x} | z) = (x^{\Psi(j)} - \tilde{x} | \sum_{i=1}^{p} \rho_i^{\varphi(j+1)} a(s_i^{\varphi(j+1)})) .$$

$$d^{\varphi(j+1)} - d^{\Psi(j)} = \sum_{i \in I_0} \rho_i^{\varphi(j+1)} [c(s_i^{\varphi(j+1)}) - (x^{\Psi(j)} | a(s_i^{\varphi(j+1)})]$$

$$+ \sum_{\substack{i \in I_1 \\ i \notin e(j)}} \rho_i^{\varphi(j+1)} [c(s_i^{\Psi(j)}) - (x^{\Psi(j)} | a(s_i^{\Psi(j)}))]$$

$$+ \sum_{\substack{i \in I_1 \\ i \in e(j)}} \rho_i^{\varphi(j+1)} [c(z_i^{\Psi(j)+1}) - (x^{\Psi(j)} | a(z_i^{\Psi(j)+1}))]$$

Comme $x^{\Psi(j)}$ appartient à $V_t^{\Psi(j)}$ et $I_1 \subset I^{\Psi(j)}$, on a :

$$c(s_i^{\Psi(j)}) - (x^{\Psi(j)} | a(s_i^{\Psi(j)})) = 0 \quad \text{pour} \quad i \in I_1$$

d'où :

$$d^{\varphi(j+1)} - d^{\Psi(j)} = \sum_{i \in I_0} \rho_i^{\varphi(j+1)} [c(s_i^{\varphi(j+1)}) - (x^{\Psi(j)} | a(s_i^{\varphi(j+1)})]$$

$$+ \Big(\sum_{i \in e(j)} \rho_i^{\varphi(j+1)} \Big) (\bar{d}^{\Psi(j)} - d^{\Psi(j)}) \ .$$

En ajoutant :

$$\sum_{i \in I_0} \rho_i^{\varphi(j+1)} (x^{\Psi(j)} - \tilde{x} | z')$$ aux deux membres avec

$z' \in (V^{\circ} + z) \cap \text{ir cc}(a(S))$, en notant que $d^{\Psi(j)} = (x^{\Psi(j)} - \tilde{x} | z')$

et en posant :

$$\varepsilon(j) = \sum_{i \in I_0} \rho_i^{\varphi(j+1)}$$

on obtient :

$$d^{\varphi(j+1)} + (\varepsilon(j) - 1) d^{\Psi(j)} = \sum_{i \in I_0} \rho_i^{\varphi(j+1)} [c(s_i^{\varphi(j+1)}) - (x^{\Psi(j)} | a(s_i^{\varphi(j+1)}) - z')$$

$$- (\tilde{x} | z')] + \Big(\sum_{i \in e(j)} \rho_i^{\varphi(j+1)} \Big) (\bar{d}^{\Psi(j)} - d^{\Psi(j)})$$

Posons :

$$B(j) = \sum_{i \in I_0} \rho_i^{\varphi(j+1)} [c(s_i^{\varphi(j+1)}) - (x^{\Psi(j)} | a(s_i^{\varphi(j+1)}) - z')]$$

et

$$\omega^* = \operatorname{Max}_{s \in S} |c(s)|$$

On a :

$$|B(j)| \leq \varepsilon(j)(\omega^* + 2 \operatorname{Max}_{t \in -a(S) \cup \{z'\}} |(x^{\Psi(j)} | t)|)$$

L'élément z' appartenant à l'intérieur relatif du cône convexe engendré par a(S) il existe, d'après le lemme 2.3, une constante positive w telle que :

$$A \cup (-A) \subset w\, A \quad \text{avec} \quad A = co(-a(S) \cup \{z'\})$$

On a alors :

$$\operatorname{Max}_{t \in A} |(x^{\Psi(j)} | t)| = \operatorname{Max}_{A \cup (-A)} (x^{\Psi(j)} | t) \leq \operatorname{Max}_{t \in wA} (x^{\Psi(j)} | t)$$

où :

$$\operatorname{Max}_{t \in -a(S) \cup \{z'\}} |(x^{\Psi(j)} | t)| \leq w \operatorname{Max}_{t \in -a(S) \cup \{z\}} (x^{\Psi(j)} | t)$$

On a :

$$\operatorname{Max}_{t \in -a(S)} (x^{\Psi(j)} | t) \leq \operatorname{Max}_{s \in S} [c(s) - (x^{\Psi(j)} | a(s))] + \omega^* = \bar{d}^{\Psi(j)} - d^{\Psi(j)} + \omega^*$$

et :

$$(x^{\Psi(j)} - \tilde{x} | z') = d^{\Psi(j)} \leq \bar{d}^{\Psi(j)} - d^{\Psi(j)} + d^*$$

avec $d^* = (x^* - \tilde{x} | z')$.

En effet d^* est aussi égal à $(x^* - \tilde{x} | z)$ qui est supérieur à $d^{\Psi(j)}$ d'après le lemme 6.3.

On a donc :

$$\underset{t\in A}{\text{Max}} \left|(x^{\Psi(j)}|t)\right| \leq w(\bar{d}^{\Psi(j)}-d^{\Psi(j)})+w \text{ Max } (d^*,\omega^*)$$

et par suite :

$$|B(j)| \leq \varepsilon(j)[\omega^*+w\text{Max}(\omega^*,d^*)+w(\bar{d}^{\Psi(j)}-d^{\Psi(j)})]$$

En posant :

$$d' = \omega^* + w \text{ Max } (\omega^*,d^*) > 0$$

On obtient :

$$d^{\varphi(j+1)}+(\varepsilon(j)-1)d^{\Psi(j)}+\varepsilon(j)(d'-(\tilde{x}|z'))$$

$$\leq \Big(\sum_{i\in e(j)} \rho_i^{\varphi(j+1)}-w\varepsilon(j)\Big)(\bar{d}^{\Psi(j)}-d^{\Psi(j)}) \ .$$

Les indices de e(j) appartenant à I_1, on a :

$$0 < \mu \leq \rho_i^{\varphi(j+1)} \quad \text{pour tout i de e(j)}$$

La suite $\{\bar{d}^{\Psi(j)}-d^{\Psi(j)}\}$ est donc majorée (pour j suffisamment grand) par la suite $\{\alpha_j\}$ avec :

$$\alpha_j = \frac{1}{\text{card}\,e(j) \times \mu - w\varepsilon(j)} (d^{\Psi(j+1)}+(\varepsilon(j)-1)d^{\Psi(j)}+\varepsilon(j)(d'-(\tilde{x}|z'))$$

La convergence de $\{d^k\}$ vers d et celle de $\varepsilon(j)$ vers zéro entraine la convergence de la suite $\{\alpha_j\}$ vers zéro et par suite :

$$\lim_{j\to\infty} (\bar{d}^{\Psi(j)}-d^{\Psi(j)}) = 0$$

La convergence de $\{d^k\}$ vers se démontre comme dans le lemme 6.3.

Q.E.D.

6.3 - REMARQUES SUR LA MISE EN OEUVRE PRATIQUE DE L'ALGORITHME.

Afin de permettre un "démarrage" de l'algorithme on peut, comme dans le cas itératif (voir chapitre 2), introduire des "points artificiels" (c_i,a_i) $(i=1,\ldots,p)$ de $\mathbb{R}^{n+1}$ et des coefficients $\rho_i > 0$ $(i=1,\ldots,p)$ tels que :

$$\sum_{i=1}^{p} \rho_i a_i - z \in V^o$$

Ces points doivent être choisis de façon à disparaitre après quelques itérations.

Les cas des dégénérescence correspondent aux cas où le cardinal de I^k est strictement inférieur à p. Dans le chapitre 2 on supposait que ce cas ne se produisait pas (hypothèse d'itérativité). Lorsque card $I^k < p$ on doit résoudre un nouveau problème d'optimisation (P^k) ; on peut prendre alors de nouvelles variables artificielles ou utiliser les éléments $s_i^{k'}$ pour $k' < k$.

EXEMPLE :

Supposons qu'à l'étape k-1 on ait card $I^{k-1} = p$ et à l'étape k card $I^k = q^k < p$. La dégénérescence décelée à l'étape k nécessite la résolution du problème (P^k) ou de son dual (Q^k) qui s'écrit :

$$(Q^k) \qquad \bar{d}^k - d^k = \operatorname{Max}\Big[\sum_{i=1}^{p-q^k+1} \lambda_i c(s_i) - (x'^k \,\Big|\, \sum_{i=1}^{p-q^k+1} \lambda_i a(s_i))\Big|$$

$$\lambda_i \geq 0 \; ; \quad \sum_{i=1}^{p-q^k+1} \lambda_i = 1 \; ; \quad \sum_{i=1}^{p-q^k+1} \lambda_i a(s_i) \in (V^k)^o\Big]$$

Pour initialiser l'algorithme de résolution de (Q^k) on doit disposer d'éléments s_i $(i=1,\ldots,p-q^k+1)$ de S et de coefficients $\lambda_i > 0$ $(i=1,\ldots,p-q^k+1)$ tels que :

$$\sum_{i=1}^{p-q^k+1} \lambda_i a(s_i) \in (V^k)^o \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{p-q^k+1} \lambda_i = 1 \; .$$

On dispose à l'étape k-1 des points s_i^{k-1} tels que :

$$\sum_{i\in I^k} \rho_i^{k-1} a(s_i^{k-1}) + \sum_{i\notin I^k} \rho_i^{k-1} a(s_i^{k-1}) - z = x' \in V^o$$

Le cardinal de I^{k-1} étant égal à 1, on a :

$$\sum_{i\notin I^k} \rho_i^{k-1} a(s_i^{k-1}) + \sum_{i\in I^k - j_o^{k-1}} \rho_i^{k-1} a(s_i^k) + \rho_{j_o^{k-1}}^{k-1} a(s_{j_o^{k-1}}^{k-1}) - z = x'$$

et à l'étape k :

$$\sum_{i\in I^k - j_o^{k-1}} \rho_i^k \, a(s_i^k) + \rho_{j_o^{k-1}}^k a(s_{j_o^k}^k) - z = x'' \in V^o \ .$$

En retranchant la dernière égalité à la précédente il vient :

$$\sum_{i\notin I^k} \rho_i^{k-1} a(s_i^{k-1}) + \rho_{j_o^k}^{k-1} a(s_{j_o^{k-1}}^{k-1}) \in L(a(s_i^k) \mid i \in I^k) + V^o$$

où $L(a(s_i^k) \mid i \in I^k)$ désigne le sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ engendré par les éléments $a(s_i^k)$ pour i dans I^k .

Comme

$$V^k = V \cap L(a(s_i^k) \mid i \in I^k)^o$$

On a :

$$\sum_{i\notin I^k} \rho_i^{k-1} a(s_i^{k-1}) + \rho_{j_o^{k-1}}^{k-1} a(s_{j_o^{k-1}}^{k-1}) \in (V^k)^o$$

On peut donc prendre pour initialiser (Q^k) les points $\{s_i^{k-1} \mid i \in \{1,\ldots,p\} - I^k + \{j_o^{k-1}\}\}$ et pour coefficients :

$$\{\rho_i^{k-1}/\mu \mid i \in \{1,\ldots,p\} - I^k + \{j_o^{k-1}\}\}$$

avec :

$$\mu = \sum_{i\notin I^k} \rho_i^{k-1} + \rho_{j_o^{k-1}}^{k-1} \ .$$

6.4 - APPLICATION A L'ALGORITHME DE REMES GENERALISE AVEC CONTRAINTES PAR EGALITE.

Soit E un espace vectoriel normé ; $f, f_1, \ldots, f_n$ n+1 éléments linéairement indépendants de E . Soit V un sous espace vectoriel de dimension p de $\mathbb{R}^n$. On cherche $\bar{x}$ dans V tel que :

$$(P) \qquad \alpha = \Big\| f - \sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i f_i \Big\| = \operatorname*{Min}_{x \in V} \Big\| f - \sum_{i=1}^{n} x_i f_i \Big\|$$

On a vu (chapitre 4) que (P) pouvait s'écrire :

$$(P) \qquad \alpha = \operatorname{Min} \left[\left| ([x,d]\,|\,[0,1]) \right| < f,t > \leq ([x,d]\,|\,[a(t),1]) \right.$$

$$\left. \forall t \in S' \text{ et } (x,d) \in V \times \mathbb{R} \right]$$

où S' est la boule unité du dual fort de E et a l'application de S' dans $\mathbb{R}^n$ définie par :

$$a : \; t \mapsto (< f_1,t >, \ldots, < f_n,t >)$$

Si on applique l'algorithme d'échange généralisé on aura à l'étape k :

$$\sum_{i=1}^{p+1} \rho_i^k (a(t_i^k),1) - (0,1) \in V^o \times \{0\}$$

où :

$$\sum_{i=1}^{p+1} \rho_i^k a(t_i^k) \in V^o \qquad \sum_{i=1}^{n+1} \rho_i^k = 1 \qquad \rho_i^k \geq 0$$

$$d^k = \sum_{i=1}^{p+1} \rho_i^k < f, t_i^k >$$

$$I^k = \{ i \in \{1,\ldots,p+1\} \,|\, \rho_i^k > 0 \}$$

$$W_t^k = \{ (x,d) \in V \times \mathbb{R} \,|\, < f, t_i^k > = (x\,|\,a(t_i^k)) + d \quad \forall i \in I^k \}$$

où, en remarquant que si (x,d) appartient à W_t^k on a $d = d^k$:

$$W_t^k = V^k \times \{d^k\}$$

avec

$$V_t^k = \{x \in V_t \mid < f,t_i^k > = (x|a(t_i^k))+d^k \quad \forall i \in I^k\}$$

Le problème (P^k) que l'on a à résoudre pour passer à l'étape k+1 s'écrit :

$$(P^k) \qquad \bar{d}^k - d^k = \min_{(x,d)\in W_t^k} \max_{t\in S'} [< f,t > -([x,d]|[a(t),1]]$$

où :

$$\bar{d}^k - d^k = -d^k + \min_{x\in V_t^k} \max_{t\in S'} [< f,t > -(x|a(t))]$$

soit :

$$\bar{d}^k = \min_{x\in V_t^k} \|f - \sum_{i=1}^{n} x_i f_i\|$$

Si on note x^k l'élément de V vérifiant :

$$< f,t_i^k > = (x^k|a(t_i^k)) + d^k \qquad i=1,\ldots,p+1$$

(Notons qu'une des équations est inutile), on a :

$$V_t^k = V^k + x^k$$

avec :

$$V^k = \{x \in V \ (x|a(t_i^k)) = 0 \quad i \in I^k\}$$

où :

$$V^k = V \cap L(a(t_i^k) \ ; \ i \in I^k)^\circ \ .$$

Par suite :

$$\bar{d}^k = \operatorname{Min}_{x \in V^k} \|f - \sum_{i=1}^{n} x_i^k f_i - \sum_{i=1}^{n} x_i f_i\|$$

et, en posant $g^k = \sum_{i=1}^{n} x_i^k f_i$

$$(P^k) \qquad \bar{d}^k = \operatorname{Min}_{x \in V^k} \|f - g^k - \sum_{i=1}^{n} x_i f_i\|$$

On a un nouveau problème d'approximation du même type que le problème initial (P), le sous espace vectoriel V^k étant de dimension moindre que V. Précisément on a :

$$\dim V^k = p - \operatorname{card} I^k + 1$$

La détermination de $\bar{d}^k$ se fait donc comme pour le problème (P). On construit p-card I^k + 2 points z_i^{k+1} de S' et p-card I^k +2 coefficients λ_i^k ($\lambda_i^k \geq 0$; $\sum_{i=1}^{\text{p-card } I^k+2} \lambda_i^k = 1$) tels que :

$$\bar{d}^k = \sum_{i=1}^{\text{p-card } I^k+2} \lambda_i^k < f-g^k, z_i^{k+1} >$$

et $$\sum_{i=1}^{\text{p-card } I^k+2} \lambda_i^k \, a(z_i^{k+1}) \in (V^k)^o$$

Si $\bar{d}^k - d^k = 0$ on arrête l'algorithme on a alors $d^k = \alpha$ et V^k est l'ensemble des solutions de (P).
Dans la pratique on arrête l'algorithme lorsque $\bar{d}^k - d^k < \varepsilon$
ε étant une précision donnée à l'avance. On a alors :

$$d^k \leq \alpha \leq d^k + \varepsilon \quad .$$

Si $\bar{d}^k - d^k > 0$ on remplace $t^k_{j_o^k}$ (avec j_o^k élément de I^k) par

$\{z_1^{k+1},\ldots,z^{k+1}_{p\text{-card } I^k+2}\}$, l'indice j_o^k étant déterminé de façon à avoir :

$$\sum_{i\in I^k - j_o^k} \rho_i^{k+1} a(t_i^k) + m^{k+1} \sum_{i=1}^{p\text{-card } I^k+2} \lambda_i^k a(z_i^{k+1}) \quad \in V^o$$

avec $m^{k+1} > 0$ et $\rho_i^{k+1} \geq 0 \quad i \in I^k - j_o^k$

On pose alors :

$$t_i^{k+1} = t_i^k \qquad \text{si} \qquad i \in I^k - j_o^k$$

et

$$\{t_i^{k+1} \mid i \in \{1,\ldots,p\} - I^k + \{j_o^k\}\} = \{z_i^{k+1} \mid i=1,\ldots,p\text{-card } I^k+2\}$$

et

$$\{\rho_i^{k+1} \mid i \in \{1,\ldots,p\} - I^k + \{j_o^k\}\} = \{m^{k+1}\lambda_i^k \mid i=1,\ldots,p\text{-card } I^k+2\}$$

REMARQUES :

1) Comme dans le cas "itératif" on n'a pas dans la pratique :

$$\operatorname{Min}_{x\in V^k} \|f-g^k - \sum_{i=1}^{n} x_i f_i\| = \sum_{i=1}^{p\text{-card } I^k+2} \lambda_i^k < f-g^k, z_i^{k+1} >$$

mais seulement :

$$(1) \qquad \sum_{i=1}^{p\text{-card } I^k+2} \lambda_i^k < f-g^k, z_i^{k+1} > \geq \operatorname{Min}_{x\in V^k} \|f-g^k - \sum_{i=1}^{n} x_i f_i\| - \eta^k$$

et

$$(2) \qquad \sum_{i=1}^{p\text{-card } I^k+2} \lambda_i^k < f-g^k, z_i^{k+1} > > d^k \quad .$$

Si $\lim_{k\to\infty} \eta^k = 0$ peut-on montrer que :

$\lim_{k\to\infty} d^k = \alpha$? La question est ouvert.

2) Dans la pratique on a rarement (voir chapitre 7) l'égalité $\rho_i^k = 0$ mais plutot ρ_i^k "petit". On peut alors remplacer

$$I^k = \{i \in \{1,\ldots,p\} \mid \rho_i^k = 0\}$$

par :

$$I^k = \{i \in \{1,\ldots,p\} \mid \rho_i^k < \varepsilon^k\}$$

où $\{\varepsilon^k\}$ est une suite de nombres positifs donnés. L'étude de la pratique et de la convergence de l'algorithme dans ce cas là reste à faire.

3) Lorsque $V = \mathbb{R}^n$, l'algorithme présenté ci-dessus a été décrit dans le cas de l'approximation de fonctions continues avec la norme de Tchebycheff par TOPFER [64].

4) Comme pour l'algorithme d'échange itératif on peut décrire l'algorithme pour la minimisation de fonctions convexes et pour le calcul d'un meilleur approximant par un élément d'un espace vectoriel vérifiant des contraintes de type "égalité" et "inégalité".

CHAPITRE 7

GENERALITE DE L'HYPOTHESE D'ITERATIVITE

On a vu au chapitre 4 comment l'algorithme d'échange, dans le cas où il est itératif, permet d'obtenir le meilleur approximant d'un élément dans un espace vectoriel normé. Cet algorithme, généralisation du "deuxième algorithme de Rémès" (P.J. LAURENT [38]), a été étudié sans faire l'hypothèse classique de Haar. On démontre en particulier que l'on peut atteindre un meilleur approximant en supposant, seulement, qu'à chaque étape un certain déterminant est différent de zéro ; on dit que l'algorithme est itératif. Nous démontrons ici la "généralité" de cette hypothèse en montrant que : si f_1 et f_2 sont deux fonctions de $C[0,1]$ données (telles que tout élément non identiquement nul du sous espace vectoriel V qu'elles engendrent s'annule au plus une infinité dénombrable de fois) et, pour des conditions initiales données, l'ensemble des fonctions f, pour lesquelles l'algorithme de Rémès appliqué à la recherche d'un meilleur approximant de f dans V est itératif, est partout dense dans $C[0,1]$ muni de la norme du max.

7.1 - DEFINITIONS ET NOTATIONS

Dans l'espace des fonctions continues sur $[0,1]$ muni de la norme :

$$\|h\| = \text{Max}\,[\,|h(t)| \mid t \in [0,1]\,]$$

on considère trois fonctions f, f_1 et f_2 linéairement indépendantes.

On cherche $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ tel que :

$$(P) \qquad \alpha = \|f - \bar{x}_1 f_1 - \bar{x}_2 f_2\| = \min_{x \in \mathbb{R}} \|f - x_1 f_1 - x_2 f_2\|$$

On note Ψ^+ l'application de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par :

$$\Psi^+ : \; t \mapsto (f(t), f_1(t), f_2(t)) \; ; \quad \Psi^- = -\Psi^+$$

et θ l'application de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par $t \mapsto (f_1(t), f_2(t))$

$\Gamma^+ = \Psi^+([0,1]) \qquad \Gamma = (\Gamma^+) \cup (-\Gamma^+)$.

Pour $A \subset \mathbb{R}^3$ on note :

$$\hat{A} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \text{il existe } x_0 \in \mathbb{R} : (x_0, x_1, x_2) \in A\}$$

$$e_o = (1,0,0)$$

$$D_o^+ = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \text{il existe } \lambda \geq 0 : x = \lambda e_o\} .$$

Rappelons dans ce cas particulier, la description géométrique de l'algorithme d'échange (chapitre 4).

On se donne au départ trois points X_1^o, X_2^o et X_3^o de Γ non alignés formant un triangle S^o et définissant un plan H^o tel que H^o coupe D_o^+ en I^o appartenant à l'intérieur relatif de S^o .

On note :

$$X_i^o = \varepsilon_i^o \Psi^+(t_i^o) \quad i=1,2,3 \quad \text{avec} \quad (\varepsilon_i^o, t_i^o) \in \{-1,+1\} \times [0,1] .$$

On suppose qu'à l'étape k on dispose de trois points :

$$X_i^k = \varepsilon_i^k \Psi^+(t_i^k) \quad i=1,2,3 ,$$

ayant les mêmes propriétés que X_i^o $(i=1,2,3)$. On définit de même S^k, H^k, $I^k = i^k e_o$ et $g^k = x_1^k f_1 + x_2^k f_2$ avec $(1, -x_1^k, -x_2^k)$ orthogonal à H^k .

Pour passer à l'étape k+1 on considère le plan d'appui $\bar{H}^k$ à Γ qui est parallèle à H^k et qui coupe D_o^+ en $\bar{I}^k = \bar{d}^k e_o$.
(On a $\bar{d}^k = \|f-g^k\|$, voir chapitre 4).

Soit $Z^{k+1} = \varepsilon^{k+1}\psi^+(z^{k+1})$ le premier point rencontré de $\Gamma \cap \bar{H}^k$ lorsque l'on décrit simultanément les segments :

$t \mapsto \psi^+(t)$ et $t \mapsto \psi^-(t)$ de 0 vers 1.

Trois cas peuvent se produirent :

(1) Aucun des segments $Z^{k+1}X_i^k$ (i=1,2,3) ne coupe D_o^+ .

On pose alors :

$$X_i^{k+1} = \begin{cases} Z^{k+1} & \text{si} \quad i = j_o^k \\ X_i^k & \text{si} \quad i \neq j_o^k \end{cases} \qquad i=1,2,3 .$$

L'indice j_o^k étant tel que D_o^+ traverse le triangle de sommets X_i^{k+1} (i=1,2,3) .

(2) Un des segments $Z^{k+1}X_i^k$ (i=1,2,3) coupe D_o^+ . On ne peut alors itérer.

(3) $H^k = \bar{H}^k$ et g^k est un meilleur approximant de f dans V .

On pose alors conventionnellement :

$$X_i^{k+1} = X_i^k \qquad (i=1,2,3) .$$

DEFINITIONS :

7.1 On dit que <u>l'algorithme s'itère n fois</u> si le cas (2) ne se produit à aucune étape k (k=0,1,2,...,n).

7.2 On dit que <u>l'algorithme est itératif</u> s'il s'itère une infinité de fois.

7.2 - DENSITE DES FONCTIONS POUR LESQUELLES L'ALGORITHME EST ITERATIF

DEFINITION 7.3 :

On dit que V (ou f_1, f_2)) vérifie l'hypothèse (D) si : quels que soient les réels x_1 et x_2 , il existe au plus une infinité dénombrable d'abscisses t de $[0,1]$ vérifiant :

$$x_1 f_1(t) + x_2 f_2(t) = 0 \ .$$

REMARQUES :

1) Cette hypothèse est à rapprocher de celle de Haar d'après laquelle $x_1 f_1 + x_2 f_2$ ne peut s'annuler qu'une fois sur $[0,1]$ ..

2) L'hypothèse (D) peut s'exprimer géométriquement en disant que : " toute droite de $\mathbb{R}^2$ passant par 0 ne rencontre qu'au plus une infinié dénombrable de fois la courbe Γ^+ de $\mathbb{R}^2$, chaque point étant compté avec sont ordre de multiplicité " .

PROPOSITION 7.1 :

Si V vérifie l'hypothèse (D), l'ensemble des fonctions f de $C[0,1]$ pour lesquelles l'algorithme de Rémès est itératif est partout dense.

La démonstration se fera en trois phases :

Phase A :

On définit les fonctions N-régulières qui sont des fonctions f particulières telles que l'algorithme s'itère au moins N fois.

Phase B :

On montre comment on peut transformer par une petite perturbation toute fonction N-régulière en une fonction N+1-régulière.

Phase C :

A partir d'une fonction f de $C[0,1]$ et de conditions initiales : (ε_i^o, t_i^o) $(i=1,2,3)$ données ; en itérant le processus de la phase B on définit, par passage à la limite, une fonction $\tilde{f}_\varepsilon$ aussi proche que l'on veut de f (au sens de la norme du max) telle que l'algorithme appliqué à $\tilde{f}_\varepsilon$, avec les même conditions initiales, soit itératif.

Les conditions initiales (ε_i^o, t_i^o) $(i=1,2,3)$ choisies une fois pour toute sont telles que 0 appartient à $\hat{S}^o$, où S^o est le triangle de $\mathbb{R}^3$ de sommets $X_i^o = \varepsilon_i^o \Psi^+(t_i^o)$ $(i=1,2,3)$.

De même les fonctions f_1 et f_2 qui vérifient l'hypothèse (D) sont fixes.

Phase A :

Soit f une fonction de $C[0,1]$ telle que l'algorithme appliqué à f s'itère au moins N fois. Si (ε_i^k, t_i^k) $(i=1,2,3)$ définit les points X_i^k , on notera par R_n la suite des abscisses utilisées jusqu'à l'étape n (pour $n \leq N$) , soit :

$$R_n = \{t_i^k \mid i=1,2,3,\ k=0,1,2,\ldots,n\} \quad .$$

DEFINITION 7.4 :

Les "points interdits" à l'étape n d'une fonction f telle que l'algorithme appliqué à f s'itère au moins n fois sont tous les points t de $[0,1]$ n'appartenant pas à R_n tels que la droite joignant le point $\theta(t)$ à l'origine rencontre l'ensemble $\theta(R_n)$. On notera $I(f,n)$ l'ensemble des "points interdits" à l'étape n .

DEFINITION 7.5 :

Soit f une fonction pour laquelle l'algorithme s'itère au moins N fois. On dit que f est N-régulière si pour tout k inférieur ou égal à N on a :

i) le premier point z^{k+1} où $|f-g^k|$ atteint sont maximum n'appartient pas à $I(f,k)$.

ii) tous les autres points (s'il en existe) où $|f-g^k|$ atteint son maximum sont des points de R_k .

LEMME 7.1 :

Si f est N-régulière, l'algorithme appliqué à f s'itère au moins N+1 fois.

DEMONSTRATION :

Il suffit de montrer que la $N+1^{ème}$ itération est possible, ou que l'éventualité (2) de la description de l'algorithme ne peut se produire.

Si Z^{N+1} est l'un des trois points X_i^N (i=1,2,3) on est dans l'éventualité (3) .

Si Z^{N+1} n'appartient pas à R_N, par définition de $I(f,N)$ les droites construites sur X_i^N (i=1,2,3) et Z^{N+1} ne rencontrent pas D_o (c'est l'éventualité (1)).

Si Z^{N+1} appartient à R_N, il est facile de voir que l'on se trouve encore dans l'éventualité (1) .

Q.E.D.

DEFINITION 7.6 :

La "fonction de garde" g_f^N d'une fonction f N-régulière est définie par :

$$g_f^N(t) = \text{Inf } \{\varphi(t), \|f-g^k\| - |f(t)-g^k(t)| \,|\, k=0,\ldots,N\}$$

avec :

$$\varphi(t) = (t-t_1^o)^2(t-t_2^o)^2(t-t_3^o)^2 \quad .$$

On voit que f étant N-régulière g_f^N ne s'annule que sur R_{N+1} .

NOTATIONS :

Tous les objets R_N (suite des points utilisés), g^n (meilleur approximant à l'étape n), z^{n+1} (premier point où $|f-g^n|$ atteint son maximum) etc... sont des objets qui dépendent de f ; aussi, chaque fois que cel sera nécessaire, on écrira $R_N(f)$, $z^{n+1}(t)$, $g^n(f)$, $t_i^k(f)$ etc...

Phase B :

LEMME 7.2 :

Soit f une fonction N-régulière, g_f^N sa fonction de garde ; si la fonction f est telle que :

(1) $\quad |f(t)-f_\varepsilon(t)| \leq \varepsilon g_f^N(t)$ avec $\varepsilon < 1$ et $t \in [0,1]$

alors la fonction f_ε est N-régulière et on a :

(2) $\quad X_i^k(f) = X_i^k(f_\varepsilon) \qquad i=1,2,3 \ ; \ k=0,1,\ldots,N$,

où $X_i^k(f)$ et $X_i^k(f_\varepsilon)$ représentent les points de $\mathbb{R}^3$ obtenus en appliquant N itérations de l'algorithme de Rémès à f et à f_ε .

DEMONSTRATION :

Puisque g_f^N s'annule sur (t_1^o,t_2^o,t_3^o) on peut déjà affirmer que $X_i^o(f) = X_i^o(f_\varepsilon)$ (i=1,2,3) et $g^o(f) = g^o(f_\varepsilon)$.
De la relation (1) on tire :

$$f(t) - \varepsilon g_f^N(t) \leq f_\varepsilon(t) \leq f(t) + \varepsilon g_f^N(t)$$

ce qui entraîne, par définition de g_f^N, que:

i) si t est un point où :

$$\bar{d}^o = \|f-g^o(f)\| = |f(t) - g^o(f)(t)|$$

on a :

$$f_\varepsilon(t) = f(t)$$

d'où :

ii) si t n'est pas un point où $|f-g^{\circ}|$ atteint son maximum on a alors :

$$|f_{\varepsilon}(t)-g^{\circ}(f)(t)| \leq |f(t)-g^{\circ}(f)(t)| + \varepsilon(\bar{d}^{\circ}-|f(t)-g^{\circ}(f)(t)|)$$

soit :

$$|f_{\varepsilon}(t)-g^{\circ}(f)(t)| < \bar{d}^{\circ} .$$

Ceci prouve que les fonctions $|f-g^{\circ}(f)|$ et $|f_{\varepsilon}-g^{\circ}(f)|$ atteignent leur maximum $\bar{d}^{\circ}$ sur le même ensemble et de plus f et f_{ε} sont égales sur cet ensemble. On en déduit :

$$X_i^1(f) = X_i^1(f_{\varepsilon}) \quad (i=1,2,3) \quad \text{et} \quad g^1(f) = g^1(f_{\varepsilon}) .$$

On procède de même pour montrer que $|f-g^1(f)|$ et $|f_{\varepsilon}-g^1(f)|$ atteignent leur maximum sur le même ensemble et ainsi de proche en proche le lemme est démontré.

Q.E.D.

On va maintenant décrire un procédé permettant d'associer à toute fonction f N-régulière une fonction f_{ε} N+1-régulière et artitrairement proche.

Soient donc f une fonction N-régulière et ε un réel strictement positif plus petit que 1.

f étant N-régulière, $|f-g^N|$ atteint sont maximum en z^{N+1} n'appartenant pas à $I(f,N)$.

i) si $|f-g^{N+1}|$ n'atteint son maximum qu'en des points de R_{N+1} .

(C'est le cas en particulier si g^N est un meilleur approximant de f dans V car conventionnellement on a $g^{N+1} = g^N$). Le point z^{N+2} est alors un point de R_{N+1} n'appartenant pas à $I(f,N+1)$. f est donc N+1-régulière, on pose alors :

$$f_{\varepsilon} = f .$$

ii) si $|f-g^{N+1}|$ atteint son maximum en un point t n'appartenant pas à R_{N+1} .

En t, la fonction de garde de f est strictement positive, soit a tel que :

(3) $g_f^N(t) > a > 0$.

Il existe $\eta_1 > 0$ tel que pour $|t-\xi| \leq \eta_1$ on ait $g_f^N(\xi) \geq a$.

On va supposer que $f(t) - g^{N+1}(t)$ est strictement positif, les modifications à apporter dans le cas contraire sont évidentes.

Il existe $\eta_2 > 0$ tel que pour $|t-\xi| \leq \eta_2$ on ait :

(4) $f(\xi)-g^{N+1}(\xi) > \|f-g^{N+1}\| - \frac{1}{2}$ a avec $0 < \varepsilon < 1$

f étant N-régulière, l'ensemble R_{N+1} est fini ; d'après l'hypothèse (D) l'ensemble $I(f,N+1)$ étant au plus dénombrable est d'intérieur vide il existe donc un intervalle :

$J = [\tau-2\lambda,\tau+2\lambda]$ avec $\lambda > 0$

tel que :

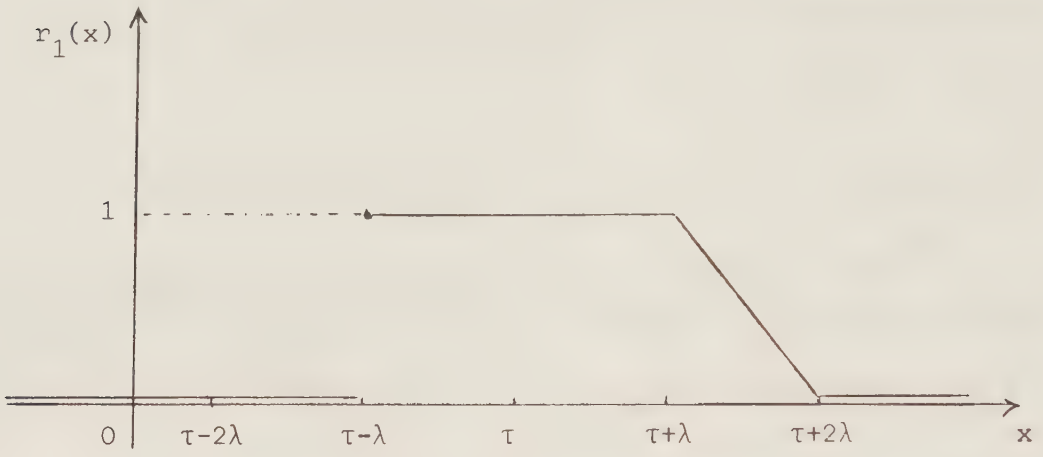
(5) $\alpha)$ $J \cap R_{N+1} = \emptyset$

(6) $\beta)$ τ n'appartient pas à $J(f,N+1)$

(7) $\gamma)$ $J \subset z_{N+2}\text{-Min}(\eta_1,\eta_2)z_{N+2}\text{-Min}(\eta_1,\eta_2)$

DEFINITION 7.7 :

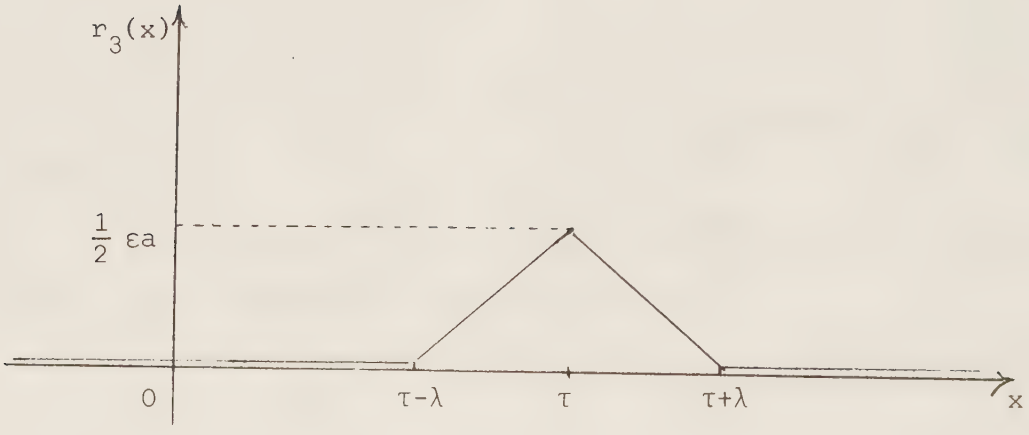
On note r_1 la fonction définie par le graphe :



r_2 la fonction définie par :

$$r_2(x) = r_1(x)\left[f(\tau-\lambda)-g^{N+1}(\tau-\lambda)-f(x)+g^{N+1}(x)\right]$$

r_3 la fonction définie par le graphe :



Soit p_ε la fonction :

$$p_\varepsilon = r_2 + r_3$$

et χ_J la fonction caractéristique de l'intervalle J .

LEMME 7.3 :

La fonction p_ε est continue et possède les trois propriétés suivantes :

(8) i) $\|p_\varepsilon\| \leq \varepsilon a$

(9) ii) $0 \leq p_\varepsilon \leq g_f^N . \chi_J$

iii) la fonction :

$x \mapsto |f(x)+p_\varepsilon(x)-g^{N+1}(x)|$

atteint son maximum uniquement au point $\bar{\varepsilon}$.

DEMONSTRATION :

Vérification immédiate.

Q.E.D.

Dans le cas ii) on pose :

$$f_\varepsilon = f+p_\varepsilon \quad .$$

On a alors le lemme :

LEMME 7.4 :

La fonction f_ε associée à f par la procédure qui vient d'être décrite possède lesttrois propriétés suivantes :

(10) i) $|f-f_\varepsilon| \leq \varepsilon g_f^N$

ii) f_ε est N+1-régulière

iii) la fonction de garde $g_{f_\varepsilon}^N$ de f_ε , considérée comme fonction N-régulière, satisfait la relation :

(11) $g_{f_\varepsilon}^N \leq (1+\varepsilon) g_f^N$.

DEMONSTRATION :

Dans le premier cas on a $f_\varepsilon = f$ ceci démontre donc i) ; dans le deuxième cas on a :

$$|f-f_\varepsilon| = |p_\varepsilon| \ .$$

Par construction $|p_\varepsilon|$ est nul en dehors de J et plus petit que εa sur J ; comme J est inclus dans $[t-\eta_1, t+\eta_1]$, intervalle sur lequel g_f^N est plus grand que a, le point i) est complètement démontré.

Le fait que f_ε soit N-régulière est une conséquence du lemme 7.2 qu'on peut appliquer. Dans le premier cas f est déjà N+1-régulière, comme $f = f_\varepsilon$ le point ii) est démontré. Dans le deuxième cas, $|f_\varepsilon - g^{N+1}(f_\varepsilon)|$ est égal d'après le lemme 7.2, à $|f_\varepsilon - g^{N+1}(f)|$ par construction de f_ε cette dernière fonction atteint son maximum en un unique point τ n'appartenant pas à $I(f,N)$ qui est égal à $I(f_\varepsilon,N)$ (d'après le lemme 7.2), ceci démontre complètement ii).

Le point iii) est immédiat dans le premier cas ; dans le deuxième cas il découle facilement de ce que, d'une part pour $n \leq N$ on a

$$g^n(f_\varepsilon) = g^n(f)$$

et d'autre part :

$$|f-f_\varepsilon| \leq \varepsilon g_f^N \ .$$

Q.E.D.

Phase C :

Nous allons construire maintenant une fonction $\tilde{f}_\varepsilon$ arbitrairement proche de la fonction donnée f.

La fonction f est supposée 1-régulière ; les points initiaux X_i^o (i=1,2,3) étant choisis pour qu'il en soit ainsi, la fonction de garde de f est alors $g_f^o = \varphi$.

Définissons une suite f_n par récurrence de la manière suivante : soit $\varepsilon \in]0,1[$

$$(12) \qquad f_o = f_{\varepsilon_o} \; ; \; \varepsilon_o = \varepsilon \; ; \; f_{n+1} = (f_n)_{\varepsilon_{n+1}} \; ;$$

$$\varepsilon_{n+1} = \text{Min} \left(\frac{\varepsilon}{2^{n+1} \| g^n_{f_n} \|} \; , \; \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} \right) .$$

Les fonctions f_n sont n-régulières et on a (lemme 7.3) :

$$\| f_{n+1} - f_n \| \leq \varepsilon_{n+1} \| g^n_{f_n} \|$$

Soit :

$$(13) \qquad \| f_{n+1} - f_n \| \leq \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} \; .$$

La suite $\{f_n\}$ est donc une suite de Cauchy, elle tend vers une limite $\tilde{f}_\varepsilon$ qui possède les propriétés énoncées dans le :

LEMME 7.5 :

La fonction $\tilde{f}_\varepsilon$ satisfait, pour $\varepsilon < \frac{1}{4} \prod_{n=1}^{\infty} (1 + \frac{1}{2^n})^{-1}$, les points i) et ii) ci-dessous :

i) $\| f - f_\varepsilon \| \leq 2\varepsilon$

ii) L'algorithme de Rémès appliqué à la recherche d'un meilleur approximant de $\tilde{f}_\varepsilon$ est itératif.

DEMONSTRATION :

On a :

$$\|f-f_n\| \leq \|f_o-f\| + \sum_{i=1}^{n} \|f_i-f_{i-1}\|$$

d'après (13) :

$$\|f-f_n\| \leq \varepsilon + \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon}{2^i} = 2\,(1 - \frac{1}{2^{n+1}})\varepsilon$$

En passant à la limite on a i).

Pour démontrer ii), nous allons évaluer $|\tilde{f}_\varepsilon - f_n|$ et appliquer le lemme 7.2 :

On a :

$$|f_{n+p}-f_n| \leq \sum_{i=0}^{p-1} |f_{n+i+1}-f_{n+i}|$$

D'après (10) et (12) :

$$|f_{n+p}-f_n| \leq \sum_{i=0}^{p-1} \varepsilon_{n+i}\, g^{n+i}_{f_{n+i}} \leq \frac{\varepsilon}{2^n} \sum_{i=0}^{p-1} \frac{1}{2^i}\, g^{n+i}_{f_{n+i}} .$$

La fonction de garde est un "inf", donc :

$$g^{n+i}_{f_{n+i}} \leq g^{n}_{f_{n+i}}$$

et d'après (11) :

$$g^{n}_{f_{n+1}} \leq (1+\varepsilon_{n+1}) g^{n}_{f_n}$$

soit :

$$g^{n}_{f_{n+i}} \leq \prod_{j=1}^{i} (1+\varepsilon_{n+j}) g^{n}_{f_n} .$$

Le produit infini :

$$\prod_{j=1}^{i} (1+\varepsilon_{n+j}) \text{ est inférieur à } \prod_{j=1}^{i} (1 + \frac{1}{2^j}) = k < \infty$$

d'où la majoration :

$$g^n_{f_{n+i}} \leq k\, g^n_{f_n}$$

ce qui donne enfin :

$$|f_{n+p}-f_n| \leq \frac{k\varepsilon}{2^n} \sum_{i=0}^{p-1} \frac{1}{2^i} g^n_{f_n} \leq \frac{2k\varepsilon}{2^n} g^n_{f_n} \quad .$$

Pour $\varepsilon < \frac{1}{4k}$ on a :

$$|f_{n+p}-f_n| \leq \frac{1}{2} g^n_{f_n}$$

et :

$$|\tilde{f}_\varepsilon - f_n| \leq \frac{1}{2} g^n_{f_n}$$

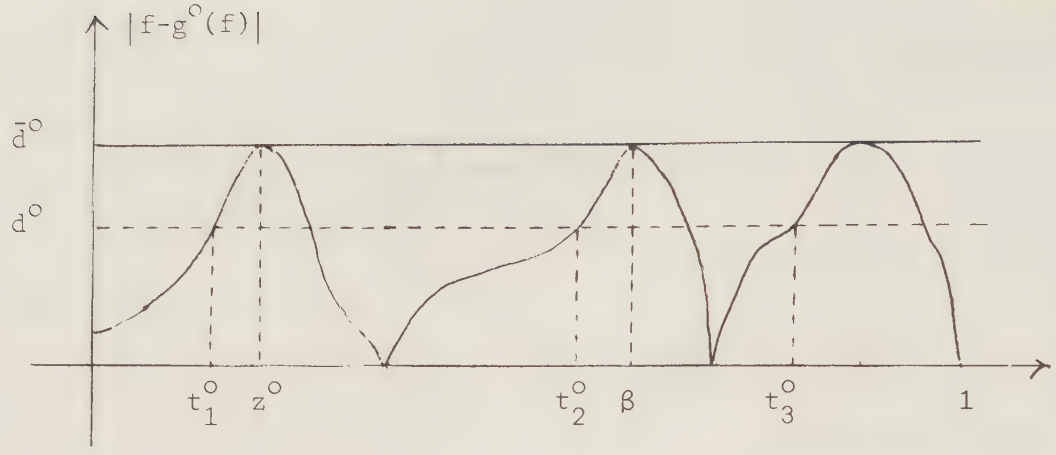
ce qui prouve, d'après le lemme 7.2, que $\tilde{f}_\varepsilon$ est n-régulière.

Comme $\tilde{f}_\varepsilon$ est n-régulière pour tout n, l'algorithme de Rémès appliqué à $\tilde{f}_\varepsilon$ sera itératif.

Le lemme 7.5 achève la démonstration de la proposition 7.1.

REMARQUES :

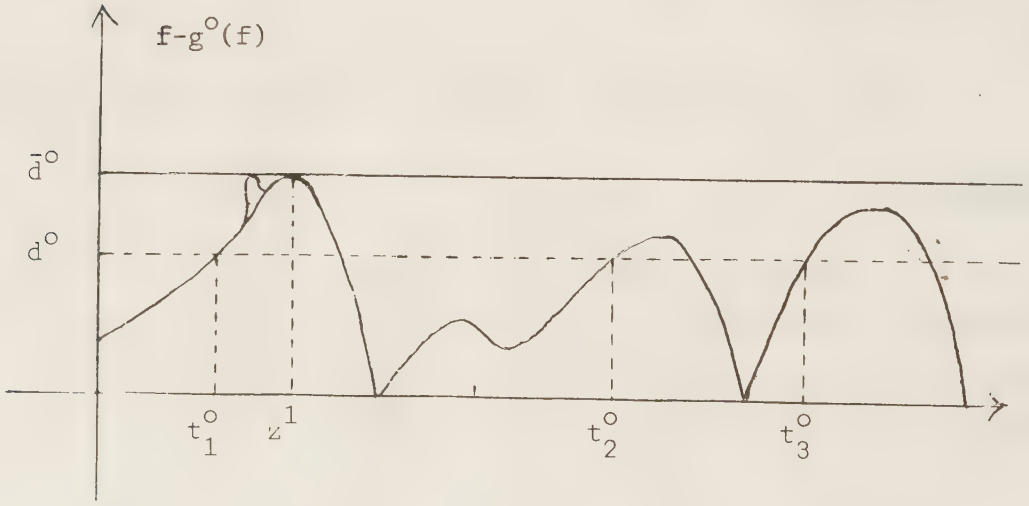
1) Il serait intéressant que l'ensemble des fonctions pour lesquelles l'algorithme est itératif soit ouvert dans $C[0,1]$, cela est faux même pour une norme de $C^k[0,1]$; il suffit de considérer une situation dans laquelle $|f-g^o(f)|$ à l'allure du dessin :



où z^1 est un point non interdit et β un point interdit. Par une perturbation arbitrairement petite de f au voisinage de z^1, on peut s'arranger pour que le premier point où $|f-g^{\circ}(f)|$ atteint son maximum soit le point β .

2) L'ensemble des fonctions pour lesquelles l'algorithme est itératif contient-il un ouvert ? La question est ouverte.

3) L'ensemble des fonctions n-régulières n'est pas ouvert : en effet on peut toujours en perturbant **très peu f,** faire "apparaître" des points où $|f-g^{\circ}(f)|$ atteint son maximum comme le montre la figure :



BIBLIOGRAPHIE

[1] AUBIN J.P.

Estimate of the error in the approximation of optimization problems with constraints by problems without constraints. In *Control theory and the calculus of variations*. A.V. Balakrishman Ed., Acad. Press, 153-175. (1969).

[2] AUSLENDER A.

Méthodes numériques pour la résolution des problèmes d'optimisation avec contraintes.
Thèse, Grenoble. (1969).

[3] BACOPOULOS A.

On ε-interpolation and simultaneous approximation.
Bull. Soc. Math. Grèce 10(1), 183-190. (1969).

[4] BELOBROV P.K.

The problem of convex approximation in a normed space.
Uch. Zap. Kazansk. Univ. 125(2), 3-6. (1966).

On a problem of Chebyshev approximation.
Izv. Vysshikh Uchebn. Zavedenii, Matematika, 2, 3-8. (1967).

[5] BENAMARA M.

Rapport de D.E.A. *Grenoble* (1972).

[6] BLATTER J., and CHENEY E.W.

Extremal problems on projections.
Intern. Conf. on Approximation Theory, Univ. of Maryland, oct 26-30. (1970).

[7] BOURBAKI N.
Eléments de Mathématiques. Espaces vectoriels topologiques. Fascicule XVIII. *Hermann*. (1964).

[8] BOURBAKI N.
Eléments de Mathématiques. Espaces vectoriels topologiques. Fascicule XV. *Hermann*. (1966).

[9] BROSOWSKI B.
Über Extremalignaturen linearer Polynome in n Veränderlichen. *Num. Math. 7, 396-405*. (1965).

[10] BROSOWSKI B.
Über Ts-chebyscheffsche Approximationen mit linearen Nebenbedingungen. *Math. Zeitschr. 88, 105-128*. (1965).

[11] BROSOWSKI B. et WEGMANN R.
Charakterisierung bester Approximationen in normierten Vektorräumen. *J. of Approx. Theory 3(4), 369-397*. (1970).

[12] BUCK R.C.
A complete characterization for extreme functionals. *Bull. Am. Math. Soc. 65, 130-133*. (1959).

[13] BUROV V.N.
Approximation with constraints in linear normed spaces. *Ukrainsk. Matem. Zh. 15(1), 3-12* and *15(2), 135-144*. (1963).

[14] CARASSO C.
Etude de l'algorithme de Rémès en l'absence de condition de Haar. *Numer. Math. 20, 165-178*. (1972).

[15] CARASSO C.
Densité des hypothèses assurant la convergence de l'algorithme de Rémès.
Rev. Fran. d'Auto., Inf. et *Re. Opera. 6^{e} année, R-3, 69-84*. (1972).

[16] CARASSO C., et LOBRY C.
Sur l'utilisation de l'algorithme de Rémès en l'absence de condition de Haar.
Colloque d'Analyse Numérique. Anglet (France). (1971).

[17] CEA J.
Optimisation. *Dunod.* (1968).

[18] CHENEY E.W.
Introduction to Approximation Theory.
Mc. Graw-Hill. (1966).

[19] CHENEY E.W. and GOLDSTEIN A.A.
A finite algorithm for the solution of consistent linear equations and inequalities and for the Tchebycheff approximations of inconsistent linear equations.
Pac. J. Math. 8, 415-427. (1958).

[20] CHENEY E.W. and GOLDSTEIN A.A.
Tchebycheff approximation in locally convex spaces.
Bull. Am. Math. Soc. 68, 449-450. (1962).

[21] CHENEY E.W. and GOLDSTEIN A.A.
Tchebycheff approximation and related extremal problems.
J. Math. and Mech. 14(1), 87-98. (1965).

[22] CHERRUAULT T.Y
Approximation d'opérateurs linéaires et applications.
Dunod. (1968).

[23] CHOQUET G.
Sur la meilleure approximation dans les espaces vectoriels normés.
Rev. Math. Pures et Appl. (Bucarest) 8, 541-542. (1963).

[24] DANTZIG G.B.
Linear Programming and extensions.
Princeton Univ. Press. (1963).

[25] DESCLOUX J.

Dégénérescence dans les approximations de Tchebycheff linéaires et discrêtes. *Num. Math. 3, 180-187.* 1961).

[26] DEUTSCH F.

Some applications of functional analysis to approximation theory. *Ph. D., Brown Univ. Div. of Appl. Math.* (1965).

[27] DUNFORD N. and SCHWARTZ J.T.

Linear Operators ; part I : *Interscience Publ.* (1958).

[28] EGGLESTON H.G.

Convexity. *Cambridge Tracts 47, Cambridge Univ. Press.* (1958).

[29] FENCHEL W.

On conjugate convex functions.
Canad. J. Math. 1, 73-77. (1949).

[30] FIACCO A.V. and McCORMICK G.P.

Nonlinear programming : sequential unconstrained minimization techniques. *J. Wiley.* (1968).

[31] GARKAVI A.L.

The Helly problem and best approximation in the space of continous functions. *Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat. 31(3), 641-656.* (1967).

[31] GASTINEL N.

Normes générales en analyse numérique linéaire.
Thèse. *Grenoble* (1960).

[32] GOLDSTEIN A.A.

Constructive real analysis.
Harper and Row. (1967).

[33] GOLOMB M.

Lectures on theory of approximation.
Argonne Nat. Lab., Appl. Math. Division, revised version 1962; (1960

[34] GOL'STEIN E.G.
A general formulation of the best approximation problem.
Dokl. Akad. Nauk SSSR, 144, 21-22. (1962).

[35] IOFFE A.D. and TIHOMIROV A.D.
Dualité des fonctions convexes et problèmes d'extremums.
Usp. Mat. Nauk. SSSR 23(6), 51-116. (1968).

[36] JOHNSON L.W.
Uniform approximation of vector valued functions.
Num. Math. 13(3), 238-244. (1969).

[37] JOLY J.L. et LAURENT P.J.
Stability and duality in convex minimization problems.
Rev. Franc. d'Inf. et de Rech. Opér., R-2, 3-42. (1971).

[38] LAURENT P.J.
Théorèmes de caractérisation d'une meilleure approximation
dans un espace normé et généralisation de l'algorithme de Rémès.
Num. Math. 10, 190-208. (1967).

[39] LAURENT P.J.
Approximation uniforme de fonctions continues sur un compact
avec contraintes de type inégalité.
Rev. Franç. d'Inf. et de Rech. Opér. 5, 81-95. (1967).

[40] LAURENT P.J.
Interprétation géométrique de l'algorithme de Rémès.
Séminaire d'Analyse Numérique de Grenoble. (1968).

[41] LAURENT P.J.
Approximation et optimisation. *Hermann.* (1972).

[42] LAURENT P.J.
Exchange algorithm in convex analysis. *Austin.* (1973).
Conference on approximation theory.
Austin. (1973).

[43] LAURENT P.J. et PHAM DINH TUAN
Global approximation of a compact set by elements of a convex set in a normed space.
Num. Math. 15, 137-150. (1970).

[44] LAURENT P.J. and MARTINET B.
Méthodes duales pour le calcul du minimum d'une fonction convexe sur une intersection de convexes.
Lecture notes in Maths., Springer Verlag, 159-180. (1970).

[45] LOBRY C.
Etude géométrique des problèmes d'optimisation en présence de contraintes.
Thèse. *Grenoble.* (1967).

[46] LORENTZ G.G.
Approximation of functions.
Holt, Rinehart and Winston. (1966).

[47] MARTINET B.
Algorithmes pour la résolution de problèmes d'optimisation et de minimax.
Thèse. *Grenoble.* (1972).

[48] MEINARDUS G.
Über den Haarschen Eindeutigkeitssatz aus der Theorie der linearen Approximationen.
Arch. d. Math. 14, 47-54. (1963).

[49] MEINGUET J.
Optimal approximation of a function and error bounds in semi-normed spaces.
Num. Math. 10, 370-388. (1967).

[50] MOREAU J.J.
Fonctionnelles convexes. Séminaire sur les équations aux dérivées partielles.
Collège de France, Paris. (1966).

[51] NIKOL'SKII V.N.

Best approximation by elements of convex sets in linear normed spaces.

Uch. Zap. Kalininsk. Gos. Ped. Inst. 29, 85-119. (1963).

[52] POLAK E.

Computational methods in optimization.

Acad. Press. (1971).

[53] REMES E.

Sur le calcul effectif des polynômes d'approximation de Tchebycheff.

C.R. Acad. Sci. Paris, 199, 337-340. (1934).

[54] RICE J.R.

The approximation of functions. Vol 1 ; linear theory.

Addison-Wesley (1964) et *Dunod* (1969).

[55] RIVLIN T.J. and SHAPIRO H.S.

A unified approach to certain problems of approximation and minimization.

SIAM J. 9, 670-699. (1961).

[56] ROCKAFELLAR R.T.

Convex Analysis.

Princeton Univ. Press. (1970).

[57] RUBINSTEIN G.S.

On one extremal problem in a linear normed space.

Sibirsk. Matem. Zh. 6(3), 711-714. (1965).

[58] SCHABACK R. et BRAESS D.

Eine Lösungsmethode für die lineare Tschebyscheff-Approximation bei nicht erfüllter Haarscher Bedingung.

Computing 6, 289-294. (1970).

[59] SCHÄFER E.

Ein Konstruktionsverfahren bei allgemeiner linear Approximation.
Num. Math. 18, 113-126. (1971).

[60] SINGER I.

Best approximation in normed linear spaces by elements of linear subspaces.
Springer Verlag. (1970).

[61] SUNDARESAN K.

Extretreme points of the unit cell in Lebesgue-Bochner function spaces. I.
Proc. Amer. Math. Soc. 23, 179-184. (1969).

[62] TCHEBYCHEFF P.L.

Sur les questions de minima qui se rattachent à la représentation approximative des fonctions.
Oeuvres 1, 273-378. (1899).

[63] TERRENOIRE M.

Application de la programmation linéaire et convexe à l'approximation au sens de Tchebycheff avec contraintes.
Thèse. *Grenoble.* (1967).

[64] TÖPFER H.J.

Tschebyscheff-Approximation bei nicht erfüllter Haarscher Bedingung.
ZAMM 45, T81-T82. (1965).

[65] VALENTINE F.A.

Convex sets. *Mc Graw-Hill.* (1964).

[66] WERNER H.

Vorbsung über Approximations theorie.
Springer Verlag, Lectures Notes in Mathematics. (1966).

A N N E X E

1 - Procédure de résolution de systèmes linéaires.

La procédure GRESOLSYSLINE résoud le système linéaire AA * X = BB où AA est une matrice carrée d'ordre N, BB un vecteur de $\mathbb{R}^n$. BOOL prend la valeur FALSE si le système est singulier.

```
PROCEDURE GRESOLSYSLINE(REAL ARRAY AA(*,*) ;
   REAL ARRAY BB(*) ; REAL ARRAY X(*) ; INTEGER VALUE N ;
   LOGICAL BOOL ) ;
BEGIN
REAL ARRAY A(1::N,1::N);
REAL ARRAY B(1::N);
     TRIANGULARISATION: BOOL:=TRUE ;
BEGIN REAL R ;INTEGER I,J ,K;
FOR I:=1 UNTIL N DO BEGIN B(I):= BB(I);
FOR J:= 1 UNTIL N DO A(I,J):= AA(I,J) END ;
         FOR K:=1 UNTIL N-1 DO
         BEGIN NORMAL:
         BEGIN IF ABS A(K,K) <= '-8 THEN GOTO ECHANGE ;
         FOR I:=K+1 UNTIL N DO
         BEGIN R:=A(I,K)/A(K,K) ; FOR J:=K+1 UNTIL N DO
         A(I,J):=A(I,J)-R*A(K,J) ;
         B(I):=B(I)-R*B(K)
         END
         END ; GOTO RETOUR ;
         ECHANGE:
         BEGIN INTEGER M ; M:=K+1 ; RET: IF ABS A(M,K) <= '-8 THEN
         M:=M+1 ELSE GOTO CONT ;
         IF M=(N+1) THEN
         BEGIN BOOL:=FALSE ; GOTO IMPOSS
         END ELSE GOTO RET ; CONT: FOR J:=K UNTIL N DO
         BEGIN R:=A(K,J) ; A(K,J):=A(M,J) ;
         A(M,J):=R
         END ; R:=B(K) ; B(K):=B(M) ; B(M):=R ;
         GOTO NORMAL END ; RETOUR: END END TRIANGULARISATION ;
         RESSYSTRI:
         BEGIN INTEGER I,J ; REAL TX ; FOR I:=N STEP -1 UNTIL 1 DO
         BEGIN TX:=0 ; FOR J:=N STEP -1 UNTIL I+1
         DO TX:=TX-X(J)*A(I,J) ;
         IF ABS A(I,I) <= '-8 THEN
         BEGIN BOOL:=FALSE ; GOTO IMPOSS
         END ; X(I):=(B(I)+TX)/A(I,I) END
     END RESSYSTRI ; IMPOSS:
  END GRESOLSYSLINE ;
```

2 - Procédure d'échange dans le cas itératif.

La procédure ECHANGEDSRN résoud le problème :

$$d = (x|z) = \text{Min}\left[(x'|z)\,\middle|\; x' \in \mathbb{R}^n \;\; ; \;\; c(s) \leq (x'|a(s)) \;\; s \in S\right] .$$

La procédure APPUI qui figure en paramètre formel a pour " tête de procédure " :

```
PROCEDURE  appui (REAL ARRAY  x,e(*); REAL RESULT ib);
```

COMMENT la procédure calcule à partir du vecteur x de $\mathbb{R}^n$ le vecteur de $\mathbb{R}^{n+1}$ et le scalaire ib tels que :

$$ib = e_o - \sum_{i=1}^{n} x_i e_i = \underset{s \in S}{\text{Max}} \left[c(s) - (x|a(s))\right] ;$$

Les paramètres DEP1 et DEP2 servent à l'initialisation de l'algorithme d'échange. On prend normalement DEP1 = 100 et DEP2 = 1. Pour les problèmes où $\{(c(s), a(s))\,|\; s \in S\}$ est symétrique, les problèmes d'approximation par exemple, on peut prendre DEP1 = 0. La quantité ITERMAX donne une borne supérieure pour le nombre d'échanges permis. ITERATIF prend la valeur FALSE si l'algorithme d'échange n'est pas itératif. Le bon fonctionnement de l'algorithme nécessite l'élimination des variables artificielles. On arrête l'algorithme lorsque IB < PREC ou lorsque la progression relative des quantitées d^k générées par l'algorithme est inférieure a PRECREL.

```
PROCEDURE ECHANGEDSKN(INTEGER VALUE N ; REAL ARRAY Z(*) ;
PROCEDURE APPUI ; REAL VALUE PREC,PRECREL ; INTEGER VALUE ITERMAX,
EP1,DEP2 ;
EAL ARRAY X(*) ;
  REAL RESULT D ; LOGICAL RESULT ITERATIF) ;
  BEGIN REAL PROCEDURE SGN(REAL V) ;
     IF V < .0 THEN -1. ELSE +1. ;
```

procédure gresolsysline

```
      INTEGER IO,JO,COMPT,NB ; REAL MAX,MIN,ALC,EP,IB,DA ;
    LOGICAL BOOL,BOOL1,BALZAC; REAL ARRAY  W,U(0::N,1::N) ;
    REAL ARRAY UM,RO,SM(1::N) ; REAL ARRAY E(0::N) ;
 INTEGER ARRAY STO(1::N) ;
 PROCEDURE CONSTRUCTIONS ;
      COMMENT CONSTRUCTION DE VALEURS DE DEPART ;
 BEGIN
 BALZAC:= TRUE ;

 FOR I:=1 UNTIL N-1 DO
 IF ABS Z(I) > 1-8 THEN BALZAC:= FALSE ;
 IF ABS (Z(N)-1) > 1-8 THEN BALZAC:= FALSE ;
 IF BALZAC THEN
 BEGIN
 COMMENT INITIALISATION POUR UN Z BALZAC ;
 FOR I:=1 UNTIL N-1 DO
 BEGIN FOR J:=1 UNTIL I-1 DO U(I,J):=0 ;
   U(I,I):=1/DEP2 ; U(I,I+1):=-1/DEP2 ;
     FOR J:=I+2 UNTIL N DO U(I,J):=0
 END ;
 FOR J:=1 UNTIL N DO
 BEGIN U(N,J):=1 ;RO(J):=1/N; U(0,J):=-DEP1 END ;
 END ELSE
 BEGIN
      IO:=1 ; MAX:=ABS Z(1) ;
      FOR I:=2 UNTIL N DO
      IF MAX < ABS Z(I) THEN
      BEGIN MAX:=ABS Z(I) ; IO:=I END ; EP:=(MAX/(N+1))*DEP2 ;
IF EP < 1-6 THEN BEGIN WRITE("LA VALEUR",DEP2,"DE DEP2 EST TROP GRANDE")
  ; GOTO FINI END ;
      FOR I:=1 UNTIL IO-1 DO U(I,IO):=0 ;
      U(IO,IO):=SGN(Z(IO)) ; RO(IO):=MAX ;
      FOR I:=IO+1 UNTIL N DO U(I,IO):=0 ; ITERATIF:=TRUE ;
      FOR J:=IO+1 UNTIL N DO
      IF ABS(Z(J)) > EP THEN
   BEGIN U(J,J):=SGN(Z(J)) ; RO(J):=ABS Z(J) ;
      FOR I:=1 UNTIL J-1 DO U(I,J):=0 ;
      FOR I:=J+1 UNTIL N DO U(I,J):=0
   END ELSE
   BEGIN U(J,J-1):=1 ; U(J,J):=-1 ; RO(J):=RO(J-1)-Z(J-1) ;
      FOR I:=1 UNTIL J-1 DO U(I,J):=0 ;
      FOR I:=J+1 UNTIL N DO U(I,J):=0
   END ;
   FOR J:=IO-1 STEP -1 UNTIL 1 DO
   IF ABS Z(J) > EP THEN
   BEGIN U(J,J):=SGN(Z(J)) ; RO(J):=ABS Z(J) ;
      FOR I:=1 UNTIL J-1 DO U(I,J):=0 ;
      FOR I:=J+1 UNTIL N DO U(I,J):=0
   END ELSE
   BEGIN U(J,J):=-1 ; U(J,J+1):=1 ;
      RO(J):=RO(J+1)-Z(J) ;
      FOR I:=1 UNTIL J-1 DO U(I,J):=0 ;
      FOR I:=J+1 UNTIL N DO U(I,J):=0
```

```
IF DEP2 > 1 THEN
FOR J:=1 UNTIL N DO
BEGIN B(J):=B(J)*DEP2 ;
   FOR I:=0 UNTIL N DO
   U(I,J):=U(I,J)/DEP2
END ;
   MIN:=Z(1) ; FOR I:=2 UNTIL N DO
   IF Z(I) < MIN THEN MIN:=Z(I) ;
   FOR J:=1 UNTIL N DO
   U(0,J):=-(ABS MIN+DEP1) ;
END
END CONSTRUCTIONS ;
CONSTRUCTIONS ;
   COMMENT FIN DE LA CONSTRUCTION DE VALEURS DE DEPARTS.
    COMMENT DEBUTDESITERATIONS ; COMPT:=0 ;
NE:=0 ;
FOR I:=1 UNTIL N DO ST0(I):=0 ;
FOR I:=1 UNTIL N DO FOR J:=1 UNTIL N DO
W(I,J):=U(J,I) ;
   ITER: COMPT:=COMPT+1 ;
IF COMPT >1 THEN
FOR J:= 1 UNTIL N DO
W(JO,J):=U(J,JO) ;
   GRESOLSYSLINE(W,U(0,*),X,N,BOOL) ;
   IF ¬ BOOL THEN WRITE("LE SYSTEME LINEAIRE POUR CALCULER X A L'ITERATI
ON",COMPT,"EST SINGULIER") ;
   APPUI(X,E,IE) ;
   IF (IE < PREC) AND (COMPT >1)  THEN
      GOTO FINI ;
   COMMENT DEBUT DE L'ECHANGE DE E AVEC UN ELEMENT U(*,JO) :
   FOR I:=1 UNTIL N DO SM(I):=-E(I) ;
   GRESOLSYSLINE(U,SM,CM,N,BOOL1) ;
   IF ¬ BOOL1 THEN WRITE("ENNUI POUR CALCULER LE VECTEUR OMEGA DANS L'EC
HANGE A L'ITERATION",COMPT) ;
   JO:=1 ; ALO:=CM(1)/BO(1) ;
   FOR J:=2 UNTIL N DO
   IF CM(J)/BO(J) < ALO THEN
   BEGIN JO:=J ; ALO:=CM(J)/BO(J) END ;
   IF ALO >= 0 THEN
   WRITE("L'ENSEMBLE DES CONTRAINTES EST VIDE") ;
   FOR J:=1 UNTIL JO-1 DO
   B(J):=B(J)-CM(J)/ALO ; BO(JO):=-1/ALO ;
   FOR J:=JO+1 UNTIL N DO
   B(J):=B(J)-CM(J)/ALO ;
   FOR I:=0 UNTIL N DO
   U(I,JO):=E(I) ;
IF NE<N THEN
BEGIN
FOR I:=1 UNTIL N DO IF ST0(I)=JO THEN
GOTO VA ; ST0(NE+1):=JO ;NE:=NE+1
END ;
VA:
IA:=0 ;
E:=0 ;
FOR J:=1 UNTIL N DO
     E:=E+BO(J)*U(0,J) ;
IF (E-EA)/ABS E < PRECREL THEN GOTO FINI ;

   COMMENT L'ECHANGE EST TERMINE ;
   FOR J:=1 UNTIL N DO
      IF ABS BO(J) < 10-7 THEN
   BEGIN ITERATIF:=FALSE ; GOTO FINT END ;
   IF COMPT < ITERMAX THEN
   GOTO ITER ELSE
      WRITE("SORTIE PAR COMPTEUR,LE NOMBRE D'ITERATIONS PERMISES EST DEP
```

```
ASSE",ITERMAX) ;
FINI:
IF NECN THEN WRITE("LES PTS DE DEPART N ONT PAS ETE ELIMINE ",
"CONNER UNE VALEUR PLUS GRANDE QUE ",DEP1,
"A DEP1","ET",DEP2,"A DEP2","OU ALGMENTER ITERMAX")
   END ECHANGEDSRN ;
```

3 - Programmation linéaire.

```
   PROCEDURE PRJLINECH(INTEGER N ; REAL ARRAY Z(*) ;
   REAL ARRAY C(*) ; REAL ARRAY A(*,*) ;
   INTEGER M ; REAL PREC ; REAL ARRAY X(*) ;
   REAL D ; LOGICAL ITERATIF) ;
   COMMENT LA PROCEDURE CALCULE DANS X=(X(1),...,X(N)) ET
   DANS D DES VALEURS SOLUTIONS DU PROBLEME DE PROGRAMMATION
   LINEAIRE D=MIN DE SIGMA POUR I=1 A N DE
   X(I)*Z(I) AVEC C(J) <= X SCALAIRE A(*,J) POUR
   J=1,...,1. PREC INDIQUE L'ECART MAXIMUM DESIRE POUR
   UNE CONTRAINTE NON SATISFAITE. ITERATIF PREND LA VALEUR
   FALSE SI L'ALGORITHME D'ECHANGE UTILISE N'EST PAS APPLICABLE.
   CN A Z(1::N),C(1::4),A(1::N,1::M) :
BEGIN
```

Procédure ECHANGEDSRN

```
    PROCEDURE APPUIPRJLIN(REAL ARRAY X,E(*) ;
      REAL IB) ;
      BEGIN REAL S ; INTEGER JM ;
IB:=0 ;
      FOR J:=1 UNTIL 4 DO
      BEGIN S:=0 ; FOR I:=1 UNTIL N DO
      S:=S+X(I)*A(I,J) ;
S:=C(J)-S ;
IF S > IB THEN
     BEGIN JM:=J ; IB:=S END
   END ;
IF IB > 0 THEN
      BEGIN FOR I:=1 UNTIL N DO
      E(I):=A(I,JM) ;
      E(0):=C(JM)
   END
   END APPUIPRJLIN ;
   ECHANGEDSRN(N,Z,APPUIPRJLIN,PREC,-6,M+1,X,D,
   ITERATIF)
   END PRJLINECH ;
```

4 - Minimisation d'une fonction convexe.

```
PROCEDURE MINFCTCONV(INTEGER VALUE N ; REAL PROCEDURE F,FP ;
REAL VALUE PREC ; REAL ARRAY X(*) ;
REAL D ; LOGICAL ITERATIF ; INTEGER ITERMAX) ;
COMMENT CALCUL PAR LA METHODE D'ECHANGE DANS
X(1::N) DU MINIMUM DE LA FONCTION CONVERGE DERIVABLE F
DE DERIVEE FP. LE MINIMUM OBTENU EST DANS D,IL APPROCHE LE
MINIMUM REEL AVEC LA PRECISION ABSOLUE PREC. ITERATIF PREND
LA VALEUR LOGIQUE TRUE SI L'ALGORITHME D'ECHANGE EST ITERATIF.
ITERMAX REPRESENTE LE NOMBRE MAXIMUM D'ITERATIONS AUTORISEES
DANS L'ALGORITHME D'ECHANGE. X EST DECLARE DE 1 A N+1 ;
BEGIN
```

Procédure ECHANGEDSRN

```
PROCEDURE APPUIFCTCONV(REAL ARRAY X,F(*) ;
REAL IB) ;
BEGIN REAL S,V ;
F(-1):=S:=F(X) ;
IB:=S-X(N+1) ; S:=F(X) ;
FOR I:=1 UNTIL N DO
BEGIN V:=FP(I,X) ;
S:=S-V*X(I) ;
F(I):=-V
END ; F(0):=S ; F(N+1):=1
END APPUIFCTCONV ;
REAL ARRAY Z(1::N+1) ;
Z(N+1):=1 ; FOR I:=1 UNTIL N DO
Z(I):=0 ;
ECHANGEDSRN(N+1,Z,APPUIFCTCONV,
PREC,-6,ITERMAX,X,D,ITERATIF,
END MINFCTCONV ;
```

5 - Minimisation d'une fonction convexe avec un nombre fini de contraintes par inégalités.

```
PROCEDURE MINCONTR(INTEGER N,P ;
REAL PROCEDURE F,FP ;
REAL PREC ; REAL ARRAY X(*) ; REAL D ;
LOGICAL ITERATIF ; INTEGER ITERMAX) ;
COMMENT CALCUL PAR LA METHODE D'ECHANGE DANS X(1::N)
LE MINIMUM DE LA FONCTION CONVERGE F(0,X) OU X VERIFIE
LES CONTRAINTES F(I,X) <= 0 POUR I=1,...,P. LA PROCEDURE
FP(I,J,X) DONNE LA COMPOSANTE I DE LA DERIVEE EN X DE LA FONCTION
F(J,*).
LE MINIMUM OBTENU EST DANS D,IL APPROCHE LE MINIMUM REEL AVEC
LA PRECISION PREC. ITERATIF PREND LA VALEUR TRUE SI
L'ALGORITHME D'ECHANGE EST ITERATIF. ITERMAX INDIQUE LE
MAXIMUM D'ITERATIONS PERMISES. X EST DECLARE DE 1 A N+1 ;
BEGIN
```

Procédure ECHANGEDSRN

```
    PROCEDURE APPUICONTR(REAL ARRAY X,E(*) ;
   REAL IE) ;
   BEGIN REAL S,V,W ; INTEGER JB ;
W:=F(0,X) ;
      S:=W-X(N+1) ; JB:=0 ;
      FOR J:=1 UNTIL P DO
      BEGIN V:=F(J,X) ;
         IF V > S THEN
         BEGIN JB:=J ; S:=V ; W:=V END
      END ; IE:=S ;
      FOR I:=1 UNTIL N DO
      BEGIN S:=FP(I,JB,X) ;
         W:=W-S*X(I) ;
         E(I):=-S
   END ; E(0):=W ;
   IF JB=0 THEN
E(N+1):=1 ELSE E(N+1):=0
   END APPUICONTR ;
   REAL ARRAY Z(1::N+1) ;
   Z(N+1):=1 ; FOR I:=1 UNTIL N DO Z(I):=0 ;
   ECHANGEDSRN(N+1,Z,APPUICONTR,PREC,'-∈,
   ITERMAX,10,1,X,C,ITERATIF)
   END MINCONTR ;
```

6 - Minimisation du maximum de l'enveloppe supérieure d'un nombre fini de fonctions affines.

```
    PROCEDURE MINSUPFCTAF(INTEGER N,M,P ; REAL ARRAY C(*) ;
       REAL ARRAY A(*,*) ; REAL ARRAY X(*) ;
    REAL E ; LOGICAL ITERATIF) ;
    COMMENT LA PROCEDURE CALCULE DANS E LE MINIMUM DU
    MAXIMUM DE (C(J)-SIGMA DE I=1 A N DE X(I)*
    A(I,J)) POUR J=1,...,M AVEC X(1::N) DANS LE POLYEDRE
    C(J)-(X SCALAIRE A(*,J)) <= 0 POUR J=M+1,...,P.
    ON A C(1::P), A(1::N,1::P), X(1::N+1). LE MINIMUM
    EST ATTEINT POUR X(1::N). LA VALEUR LOGIQUE ITERATIF
    PREND LA VALEUR FALSE SI LA METHODE D'ECHANGE N'EST PAS
    ITERATIVE OU SI LE POLYEDRE EST D'INTERIEUR VIDE ;
    BEGIN
```

Procédure ECHANGEDSRN

```
      PROCEDURE APMINSUP(REAL ARRAY X,E(*) ;
      REAL IB) ;
      BEGIN INTEGER JB ; REAL S ;
IB:=0 ;
    FOR J:=1 UNTIL P DO
    BEGIN S:=C(J) ;
       FOR I:=1 UNTIL N DO
        S:=S-X(I)*A(I,J) ;
          IF J<= M THEN
      S:=S-X(N+1) ;
      IF IB<= S THEN
    BEGIN JB:=J ;
IB:=S
       END
END ;
```

```
 IF JB >0 THEN
BEGIN B(0):=C(JB) ;
      FOR I:=1 UNTIL N DO
B(I):=A(I,JB) ;
     IF JB<= M THEN
    C(N+1):=1 ELSE C(N+1):=0
   END
END APMINSUP ;
   REAL ARRAY Z(1::N+1) ;
   FOR I:=1 UNTIL N DO Z(I):=0 ; Z(N+1):=1 ;
   CHANGEDSRN(N+1,Z,APMINSUP,'-4,2*P+1,X,L,ITERATIF)
END MINSUPFCTAF ;
```

7 - Minimisation d'une fonction convexe avec une infinité de contraintes :

```
PROCEDURE MINFCTCONTRINF(INTEGER N ; REAL PROCEDURE F,FP,G,GP ;
REAL VALUE A,B,PREC ; REAL ARRAY X(*) ;
REAL L ; LOGICAL ITERATIF ; INTEGER ITERMAX) ;
COMMENT CALCUL PAR LA METHODE D'ECHANGE DANS X(1::N)
DU MINIMUM DE LA FONCTION CONVEXE DERIVABLE F(X) DE X
VERIFIE LES CONTRAINTES G(T,X) <= 0 POUR T COMPRIS
ENTRE A ET B. LA PROCEDURE FP(I,X) DONNE LA ITERE COMPOSANTE
DU GRADIENT DE F EN X ET LA PROCEDURE G(I,T,X) DONNE
LA ITERE COMPOSANTE DU GRADIENT DE G EN X POUR T FIXE.
LE MINIMUM OBTENU EST EN D,IL APPROCHE LE MINIMUM REEL AVEC
LA PRECISION PREC. ITERATIF PREND LA VALEUR TRUE SI
L'ALGORITHME D'ECHANGE EST ITERATIF. ITERMAX INDIQUE LE
MAXIMUM D'ITERATIONS PERMISES. X DECLARE DE 1 A N+1 ;
BEGIN
PROCEDURE APPLIFCTCONTR(REAL ARRAY X,B(*) ;
REAL TB) ;
BEGIN REAL S,T,V,TB,H,HC ; INTEGER G ;
   LOGICAL BOO ;
   BOO:=TRUE ; S:=F(X)-X(N+1) ; G:=0 ;
   H:=(B-A)/5 ; HO:=H/2 ;
   IF G(A,X) > S THEN
   BEGIN TB:=A ; S:=V ; BOO:=FALSE END ;
   ITER: T:=A+HO ; WHILE T <= B DO
      BEGIN V:=G(T,X) ; IF V > S THEN
      BEGIN TB:=T ; S:=V ;
      BOO:=FALSE
   END ; T:=T+H
   END ; G:=G+1 ;
   IF (S < PREC) AND (G < 9) THEN
   BEGIN H:=H/2 ; HC:=HC/2 ; GOTO ITER END ;
   TB:=S ;
   IF BOO THEN
   BEGIN S:=F(X) ; FOR I:=1 UNTIL N DO
      BEGIN V:=FP(I,X) ;
      S:=S-X(I)*V ;
      B(I):=-V
   END ; B(0):=S ; B(N+1):=1
END ELSE
   BEGIN S:=G(TB,X) ; FOR I:=1 UNTIL N DO
   BEGIN V:=GP(I,TB,X) ;
      S:=S-X(I)*V ;
      B(I):=-V
   END ; B(0):=S ; B(N+1):=0
END
```

```
END APPLIFCTCONTR ;
```

Procédure ECHANGEDSRN

```
REAL ARRAY Z(1::N+1) ;
Z(N+1):=1 ; FOR I:=1 UNTIL N DO Z(I):=0 ;
ECHANGEDSRN(N+1,Z,APPUIFCTCONTR,PREC,1-6,
ITERMAX,100,1,X,D,ITERATIF)
END MINFCTCONTRINF ;
```

8 - Algorithme d'échange itératif avec contraintes :

```
PROCEDURE ECHTRANSDFRN(INTEGER VALUE N,P ;
REAL ARRAY VO(*,*) ;
REAL ARRAY Z,XT(*) ; PROCEDURE APPUI ; REAL VALUE PREC,EPS1,EPS2 ;
 INTEGER VALUE ITERMAX ; REAL ARRAY X(*) ;
 REAL RESULT D ; LOGICAL RESULT ITERATIF) ;
 COMMENT LA PROCEDURE CALCULE DANS D AVEC LA PRECISION EPS ET
 DANS X(1::N) LA SOLUTION DU PROBLEME
 D=MIN((X/Z)/X DANS(V+XT) ET
 C(S) <= (X/A(S)) POUR S DANS S)=(X/Z)
 V EST UN SOUS ESPACE VECTORIEL DE DIMENSION P DE RN. VO(*,J)
 POUR J=P+1 JUSQUA N REPRESENTE UNE BASE DE L'ORTHOGONAL DE V
 LA PROCEDURE APPUI(X,E,IB) CALCULE DANS E(0::N) ET DANS
 IB LES VALEURS TELLES QUE:
 IS=E(0)-(X/E)=MAX((C(S)-(X/A(S))) POUR S DANS S).
 ITERMAX INDIQUE LE MAXIMUM D'ITERATIONS AUTORISEES DANS LA
 METHODE D'ECHANGE. LA VALEUR LOGIQUE ITERATIF PREND LA
 VALEUR TRUE SI L'ALGORITHME EST ITERATIF. (PARAGRAPHE 3-9) ;
 BEGIN REAL PROCEDURE SGN(REAL VALUE V) ;
 IF V < .0 THEN -1. ELSE 1. ;
 INTEGER ID,COMPT,K,JC ;
 REAL MAX,EP,SGN,IE,ALC ,DA ;
 REAL ARRAY SM,RC,CM(1::N) ;
 REAL ARRAY C(0::N,1::N) ;
 REAL ARRAY W(1::N,1::N) ;
 REAL ARRAY E(0::N) ;
 LOGICAL PCCL,SCCL1 ,BALZAC ;
PROCEDURE CONSTRUCTION ;
BEGIN
 COMMENT CONSTRUCTION DE VECTEURS ET DE RC DE DEPART ;
 ID:=1 ; MAX:=ABS Z(1) ;
BALZAC:= TRUE ;
FOR I:=1 UNTIL N-1 DO
IF ABS Z(I) > 1-6 THEN BALZAC:= FALSE ;
IF ABS (Z(N)-1) > 1-6 THEN BALZAC:= FALSE ;
IF BALZAC THEN
BEGIN
COMMENT INITIALISATION POUR UN Z BALZAC ;
FOR J:=1 UNTIL P DO
BEGIN V(N,J):=1 ; RC(J):=1/P END ;
```

```
FOR I:=N-1 STEP -1 UNTIL N-P+1 DO
BEGIN FOR J:=1 UNTIL I-N+P-1 DO U(I,J):=0 ;
U(I,I-N+P):=1/DEP2 ;
U(I,I-N+P+1):=-1/DEP2 ;
FOR J:=I-N+P+2 UNTIL P DO U(I,J):=0
END ;
FOR I:=N-P STEP -1 UNTIL 1 DO
FOR J:=1 UNTIL P DO U(I,J):=0 ;
END ELSE
BEGIN
   FOR I:=2 UNTIL N DO
   IF MAX < ABS Z(I) THEN
   BEGIN MAX:=ABS Z(I) ; IO:=I END ; EP:=MAX/(P+1) ;
   IF EP < 1E-7 THEN
   BEGIN ITERATIF:=FALSE ;
   WRITE('LE VECTEUR Z EST TROP PROCHE DE ZERO') ; GOTO FINI
   END ;
IF IO< P THEN
BEGIN
   FOR I:=1 UNTIL IO-1 DO U(I,IO):=0 ;
   U(IO,IO):=SGN(Z(IO))/DEP2 ; RO(IO):=MAX*DEP2 ;
   FOR I:=IO+1 UNTIL P DO U(I,IO):=0 ;
   ITERATIF:=TRUE ;
   FOR J:=IO+1 UNTIL P DO
   IF ABS Z(J) > EP THEN
   BEGIN U(J,J):=SGN(Z(J))/DEP2; RO(J):=ABS Z(J)*DEP2;
   FOR I:=1 UNTIL J-1 DO U(I,J):=0 ;
   FOR I:=J+1 UNTIL N DO U(I,J):=0
   END ELSE
   BEGIN U(J,J-1):=1/DEP2; U(J,J):=-1/DEP2; RO(J):=RO(J-1)-Z(J)*DEP2;
   FOR I:=1 UNTIL J-1 DO U(I,J):=0 ;
   FOR I:=J+1 UNTIL N DO U(I,J):=0
   END ;
   FOR J:=IO-1 STEP -1 UNTIL 1 DO
   IF ABS Z(J) > EP THEN
   BEGIN U(J,J):=SGN(Z(J))/DEP2; RO(J):=ABS Z(J)*DEP2;
   FOR I:=1 UNTIL J-1 DO U(I,J):=0 ;
   FOR I:=J+1 UNTIL N DO U(I,J):=0
   END ELSE
   BEGIN U(J,J):=-1/DEP2 ; U(J,J+1):=1/DEP2;
   RO(J):=RO(J+1)-Z(J)*DEP2;
   FOR I:=1 UNTIL J-1 DO U(I,J):=0 ;
   FOR I:=J+1 UNTIL N DO U(I,J):=0
   END ;
   FOR I:=P+1 UNTIL N DO
   U(I,IO):=Z(I)/(MAX*DEP2) ;
END ELSE
BEGIN
   FOR I:=1 UNTIL IO-1 DO U(I,P):=0 ;
   U(IO,P):=SGN(Z(IO)) ; RO(P):=MAX ;
   ITERATIF:=TRUE ;
   FOR J:=P-1 STEP -1 UNTIL 1 DO
   IF ABS Z(IO-P+J) > EP THEN
   BEGIN U(IO-P+J,J):=SGN(Z(IO-P+J)) ; RO(J):=ABS Z(IO-P+J) ;
   FOR I:=1 UNTIL IO-P+J-1 DO U(I,J):=0 ;
   FOR I:=IO-P+J+1 UNTIL N DO U(I,J):=0
   END ELSE
   BEGIN U(IO-P+J,J):=-1 ; U(IO-P+J,J+1):=1 ;
   RO(J):=RO(J+1)-Z(IO-P+J) ;
   FOR I:=1 UNTIL IO-P+J-1 DO U(I,J):=0 ;
   FOR I:=IO-P+J+1 UNTIL N DO U(I,J):=0
   END ;
```

```
   FOR I:=1 UNTIL ID-P DO
   U(I,P):=Z(I)/MAX ;
   FOR I:=ID+1 UNTIL N DO
   U(I,P):=Z(I)/MAX ;
END END ;
   FOR J:=1 UNTIL P DO
   U(0,J):=-DEP1
END CONSTRUCTION ;
CONSTRUCTION ;
   COMMENT FIN DE LA CONSTRUCTION DE VALEURS DE DEPART.
   DEBUT DES ITERATIONS ; COMPT:=0 ; ITERATIF:=TRUE ;
FOR J:=1 UNTIL P DO
FOR I:=1 UNTIL N DO
W(J,I):=U(I,J) ;
   FOR J:=P+1 UNTIL N DO
   BEGIN FOR I:=1 UNTIL N DO
   W(J,I):=U(I,J):=VC(I,J) ; SOM:=0 ; FOR K:=1 UNTIL N DO
   SOM:=SOM+XT(K)*VO(K,J) ; U(0,J):=SOM ; RO(J):=0 ;

   END ;
   ITER: COMPT:=COMPT+1 ;


IF COMPT > 1 THEN
   FOR I:=1 UNTIL N DO
   W(JO,I):=U(I,JO) ;
   GRESOLSYSLINEW(N,U(0,*),X,N,BOOL) ;
IF ¬ BOOL THEN WRITE("LE SYSTEME LINEAIRE POUR CALCULER X A L'ITERATION"
,COMPT,"EST SINGULIER") ;
   APPUT(X,E,IB) ;
    O:=0 ; FOR I:=1 UNTIL N DO
   O:=O+(X(I)-XT(I))*Z(I) ;
   IF IB < PREC THEN
   GOTO FINI ;
   COMMENT DEBUT DE L'ECHANGE DE E AVEC UN ELEMENT U(*,JO) ;
   FOR I:=1 UNTIL N DO SM(I):=-E(I) ;
   GRESOLSYSLINEW(U,SM,CM,N,BOOL1) ;
IF ¬ BOOL1 THEN WRITE("LE SYSTEME LINEAIRE POUR CALCULER OMEGA DANS L'EC
HANGE A L'ITERATION",COMPT,"EST SINGULIER") ;
     JO:=1 ; ALO:=CM(1)/RO(1) ;
   FOR J:=2 UNTIL P DO
   IF CM(J)/RO(J) < ALO THEN
   BEGIN JO:=J ; ALO:=CM(J)/RO(J) END ;
   IF ALO >= 0 THEN
   WRITE("L'ENSEMBLE DES CONTRAINTES EST VIDE") ;
   FOR J:=1 UNTIL JO-1 DO
   RO(J):=RO(J)-CM(J)/ALO ; RO(JO):=-1/ALO ;
   FOR J:=JO+1 UNTIL N DO
   RO(J):=RO(J)-CM(J)/ALO ;
   FOR I:=0 UNTIL N DO
   U(I,JO):=E(I) ;
   COMMENT L'ECHANGE EST TERMINE ;
SORTIE:WRITE("COMPT",COMPT,O,IB) ;
   FOR J:=1 UNTIL P DO
   IF ABS RO(J) < '-7 THEN
   BEGIN ITERATIF:=FALSE ; GOTO FINI END ;
   IF COMPT < ITERMAX THEN GOTO ITER ;
   WRITE("SORTIE PAR COMPTEUR,LE NOMBRE D'ITERATIONS PERMISES=",
ITERMAX,"EST DEPASSE") ;
   WRITE("IB N'EST PAS ENCORE EN DESSOUS DE",PREC,"IL EST EGAL A:",IB)
    ; FINI: FOR J:=1 UNTIL P DO
   IF ABS(U(0,J)+DEP1) <= '-5 THEN
   BEGIN ITERATIF:=FALSE ;
WRITE("LES VARIABLES ARTIFICIELLES
NE SONT PAS ELIMINEES, MODIFIER DEP1 OU DEP2 ")
   END
   END ECHTRANSDERN ;
```

9 - Programmation lineaire avec contraintes de type égalité :

```
PROCEDURE PROL(INTEGER VALUE N,Q,M ; REAL ARRAY A,B(*,*) ;
REAL ARRAY C,F,Z(*) ; REAL VALUE PREC ; REAL ARRAY X(*) ;
REAL RESULT D ; LOGICAL RESULT ITERATIF) ;
COMMENT LA PROCEDURE CALCULE PAR L'ALGORITHME D'ECHANGE
LE MINIMUM D DE (X/Z) POUR X VERIFIANT LES CONTRAINTES
DANS RN: (A(*,J)/X(*)) >= C(J)(J=1,...,M)
    (B(I,*)/X(*)=F(I)(I=1,...,Q)
ON DOIT AVOIR Q < N , LES MATRICES SONT A(1::N,1::M),
B(1::Q,1::N),C(1::M),F(1::Q). PREC EST UN REEL INDIQUANT
LA TOLERANCE POUR LA NON VERIFICATION DES CONTRAINTES
ITERATIF PREND LA VALEUR FALSE SI L'ALGORITHME N'EST PAS
ITERATIF. LA MATRICE B DOIT ETRE DE RANG Q ;
BEGIN INTEGER INDICE,P ;
    REAL ARRAY XI(1::N) ; REAL ARRAY BM(1::Q,1::Q) ;
    REAL ARRAY SOL(1::Q) ; REAL ARRAY VO(1::N,N-Q+1::N) ;
    LOGICAL BOOL ;
```

procédure GRESOLSYSLINE

procédure ECHTRANSDERN

```
  PROCEDURE APPUIPROLIN(REAL ARRAY X,E(*) ;
    REAL IB) ;
    BEGIN REAL S ; INTEGER JM ;
I:=0 ;
    FOR J:=1 UNTIL M DO
    BEGIN S:=0 ; FOR I:=1 UNTIL N DO
    S:=S+X(I)*A(I,J) ;
S:=C(J)-S ;
IF S > IB THEN
    BEGIN JM:=J ; IB:=S END
  END ;
IF IB > 0 THEN
    BEGIN FOR I:=1 UNTIL N DO
    E(I):=A(I,JM) ;
    F(J):=C(JM)
  END
END APPUIPROLIN ;
    IF Q >= N THEN BEGIN WRITE("ERREUR DANS LES DONNEES Q DOIT ETRE IN
FERIEUR A N") ; GOTO FINI END ;
    INDICE:=0 ;
    GRESOLSYSLINE(E,F,XI,Q,BOOL) ;
    IF BOOL=FALSE THEN
    BEGIN ET: INDICE:=INDICE+1 ;
        FOR I:=1 UNTIL Q DO
        FOR J:=1 UNTIL Q DO
        BM(I,J):=B(I,J+INDICE) ;
        GRESOLSYSLINE(BM,F,SOL,Q,BOOL) ;
        IF(BOOL=FALSE) AND (INDICE < (N-Q)) THEN
        GO TO ET ELSE IF INDICE=(N-Q) THEN BEGIN
        WRITE("LES VECTEURS B(I,*) POUR I=1,...,Q NE SONT PAS LINEAIREM
ENT INDEPENDANTS") ; GOTO FINI END ;
    ...
```

```
        FOR I:=1 UNTIL INDICE DO XT(I):=0 ;
        FOR I:=Q+INDICE+1 UNTIL N DO XT(I):=0 ;
        IF INDICE > 0 THEN
        BEGIN FOR I:=1 UNTIL Q DO
           XT(I+INDICE):=SOL(I)
        END ;
        P:=N-Q ;
        FOR J:=1 UNTIL Q DO
        FOR I:=1 UNTIL N DO
        VO(I,P+J):=B(J,I) ;
        ECHTRANSDERN(N,P,VO,Z,XT,APPUIPRELIN,PREC,IC,1,M+1,X,D,ITERATIF) ;
FINI:
    END PREL ;
```

10°- Minimisation d'une fonction convexe avec contraintes de type égalité et inégalité :

```
    PROCEDURE MINEGSEV(INTEGER VALUE N,P,Q ; REAL PROCEDURE F,FP ;
    REAL ARRAY B(*,*) ; REAL ARRAY G(*) ; REAL VALUE PREC ;
    REAL ARRAY X(*) ; REAL RESULT D ; LOGICAL RESULT ITERATIF ;
    INTEGER VALUE ITERMAX) ;
    COMMENT LA PROCEDURE CALCULE DANS X(1::N) PAR LA METHODE
    D'ECHANGE LE MINIMUM DE F(0,X) POUR X VERIFIANT:
    F(J,X) <= 0 (J=1,...,P) ET (X/E(*,J))=G(J) POUR J=1,...,Q.
    LA PROCEDURE FP(I,J,X) DONNE LA COMPOSANTE I DE LA DERIVEE EN X DE LA
    FONCTION F(J,*). LE MINIMUM OBTENU EST DANS D,LA CONTRAINTE LA PLUS
    MAL VERIFIEE A L'OPTIMUM EST DE LA FORME F(JO,X) <= PREC. ITERATIF
    PREND LA VALEUR TRUE SI L'ALGORITHME EST ITERATIF. ITERMAX
    INDIQUE LE MAXIMUM D'ITERATIONS PERMISES DANS L'ALGORITHME
    D'ECHANGE. ON A B(1::N,1::Q),G(1::Q),X(1::N) ;
    BEGIN REAL ARRAY VO(1::N+1,N+2-Q::N+1) ;
    LOGICAL BOL ; INTEGER JO,JG ;
    REAL ARRAY XX,XT,Z(1::N+1) ; REAL ARRAY PM(1::Q,1::Q) ;
```

procedure GRESOLSYSLINE et ECHTRANSDERN

```
     PROCEDURE APPUICONTR(REAL ARRAY X,E(*) ;
    REAL JB) ;
    BEGIN REAL S,V,W ; INTEGER JP ;
W:=F(0,X) ;
       S:=W-X(N+1) ; JB:=0 ;
       FOR J:=1 UNTIL P DO
       BEGIN V:=F(J,X) ;
          IF V > S THEN
          BEGIN JB:=J ; S:=V ; W:=V END
       END ; JB:=S ;
       FOR I:=1 UNTIL N DO
       BEGIN S:=FP(I,JB,X) ;
          W:=W-S*X(I) ;
          E(I):=-S
    END ; E(0):=W ;
    IF JB=0 THEN
E(N+1):=1
    ELSE E(N+1):=0.
    END APPUICONTR ;
```

```
    Z(N+1):=1 ; FOR I:=1 UNTIL N DO Z(I):=0 ;
    FOR J:=1 UNTIL G DO
    FOR I:=1 UNTIL G DO
    PM(J,I):=P(I,J) ;
    COMMENT DEBUT DU CALCUL DE XT(1::N) ;
    GRESOLSYSLINE(PM,G,XT,G,BOO) ; GO:=0 ;
    FOR I:=G+1 UNTIL N+1 DO XT(I):=0 ;
    IF ¬ BOO THEN
    BEGIN REAL ARRAY XXX(1::Q) ;
    FOR GO:=1 UNTIL N-G DO
    BEGIN FOR J:=1 UNTIL G DO
    FOR I:=1+GO UNTIL Q+GO DO
    PM(J,I):=P(I,J) ;
    GRESOLSYSLINE(PM,G,XXX,G,BOO) ;
    IF BOO THEN GOTO SUITE
    END ; WRITE("LE CALCUL D'UN ELEMENT XT(1::N) VERIFIANT LES CONTRAINTE
S EGALITE PRESENTE DES DIFFICULTES") ;
    GOTO FINI ;
    SUITE: FOR I:=1 UNTIL GO DO XT(I):=0 ;
    FOR I:=G+GO+1 UNTIL N+1 DO XT(I):=0 ;
    FOR I:=1+GO UNTIL G+GO DO XT(I):=XXX(I)
    END ; GG:=N+1-G ;
    FOR J:=GG+1 UNTIL N+1 DO
    BEGIN FOR I:=1 UNTIL N DO
    VC(I,J):=B(I,J-GG) ;
    VC(N+1,J):=0
    END ;
    ECHTRANSDERN(N+1,GG,VC,Z,XT,APPLICONTR,PREC,100,1,ITERMAX,XX,0,
ITERATIF) ;
    FINI:
    FOR I:=1 UNTIL N DO X(I):=XX(I) ;
    END MINFCSLV ;
```

11 - Approximation de Techbycheff sur un intervalle

La structure du programme est indiquée à partir de l'exemple de l'approximation de la fonction t^5 par un polynôme de degré 4 sur $[-1,+1]$.

```
    BEGIN
REAL PROCEDURE FA( REAL VALUE T ) ; T**5 ;
    REAL PROCEDURE F(INTEGER VALUE I ; REAL VALUE T) ;
    CASE I OF (T,T,T**2,T**3,T**4) ;
REAL A,B ; A:=-1 ;B:=1 ;
END ;
```

On met ici la procédure ECHANGEDSRN en remplaçant éventuellement la procédure CONSTRUCTIONS par la procédure ci-dessous qui n'utilise pas des "points artificiels"

PROCEDURE CONSTRUCTIONS ;

```
      COMMENT CONSTRUCTION DE VALEURS DE DEPART ;
BEGIN
H:=(B-A)/(N-1) ;
FOR I:=1 UNTIL N-1 DO
FOR J:=1 UNTIL N DO
U(I,J):=F(I,A+(J-1)*H) ;
FOR I:=1 UNTIL N-1 DO
U(0,I):=-F(I,A+(N-1)*H) ;
SOLSYSLIN(U,U(0,*),RC,N-1,BOOL) ;
IF BOOL=FALSE THEN WRITE(
"ECHEC AU DEPART") ;
X(0):=A ;
FOR J:=1 UNTIL N DO
U(N,J):=F(A+(J-1)*H) ;
FOR J:=1 UNTIL N-1 DO
IF SGN(RC(J))=-1 THEN
BEGIN FOR I:=1 UNTIL N-1 DO
    U(I,J):=-U(I,J) ;
    RC(J):=-RC(J)
END ; MAX:=0 ;
FOR J:=1 UNTIL N DO
MAX:=MAX+RC(J) ;
FOR J:=1 UNTIL N DO
BEGIN U(N,J):=1 ;
    RC(J):=RC(J)/MAX
END ;
END CONSTRUCTIONS ;
```

suite du programme

```
INTEGER N ; N:=5 ;
BEGIN
PROCEDURE MAX ( REAL ARRAY X,L(*) ; REAL RESULT IE) ;
    COMMENT LA PROCEDURE CALCULE LES VALEURS DE L(0::N+1)
    ET ID POUR LA NORME DE TCHEBICHEFF SUR UN INTERVALLE A,B.
    LES VALEURS DE A ET B SONT DANS LES PARAMETRES A MODIFIER DANS
    L'ACTIVATION DE LA PROCEDURE TCHEB ;
    BEGIN PROCEDURE TCHEB(REAL VALUE A,B) ;
    BEGIN REAL PROCEDURE F1(REAL VALUE T) ;
BEGIN
      REAL S ; S:=FA(T) ;
      FOR I:=1 UNTIL N DO
      S:=S-U(I,T)*X(I) ;
      S
      END F1 ;
      REAL S,T,S1,H0,H,V1,V2,V3,T0,T,XC ;
      LOGICAL BOO ; INTEGER SGN ;
      S:=ABS F1(A) ; T0:=A ; T:=A ;
      H0:=H:=(B-A)/10 ; REP: BOO:=FALSE ;
      REP: V1:=F1(T) ; V2:=F1(T+H) ;
```

```
        [illegible]: [illegible] (V -V[illegible])*(V[illegible]-V[illegible]) <  THEN GOTO [illegible]V ;
        IF T+[illegible]*H > B THEN GOTO TEST ;
        T:=T+H ; V[illegible]:=V[illegible] ; V[illegible]:=V3 ; V3:=EE(T+[illegible]*H) ; GOTO ITER ;
        TEST: IF ABS EE(B) > [illegible] THEN
        BEGIN S:=ABS EE(B) ; ABS:=B END ;
        GOTO S[illegible] ;
        [illegible]V: H:=H/2 ;
        IF ¬ B[illegible] THEN T:=T+H ;
        [illegible]:=T[illegible] ;
        IF H/HC > [illegible]-3 THEN GOTO DEP ;
        IF ABS V2 > S THEN
        BEGIN S:=ABS V2 ; [illegible]:=T+H END ;
        T:=TC ; H:=HC ; GOTO REP ;
        SORT: XC:=REAL S ;
[illegible]:=S-X(N+1)  ;
        IF EE(X3) >= 0 THEN SGN:=1 ELSE
        SGN:=-1 ;
[illegible]:=SGN*FA()() ;
        FOR I:=1 UNTIL N DO
        [illegible](I):=SQRT(I,X ) ; [illegible](N+1):=1
    END TCHEB ;
    TCHEBS(A,B)
[illegible] MAX ;
    REAL [illegible]Y X,Z(1::N+1) ;
[illegible]([illegible] [illegible] PROFILE ; REAL [illegible] ;
    FOR I:=1 UNTIL N DO Z(I):=0 ; Z(N+1):=1 ;
TCHANGEDSIGN(N+1,Z,MAX,'-5,'-5,100,10,4,X,D,ITERATIF) ;
WRITE("TEST DE APPROX AU SENS DU MAX SUR -1,+1
DE X**",N,"PAR UN POLY DE DEGRE ",N-1) ;
FOR I:=1 UNTIL N DO
WRITE(X(I),"*T**(",I-1);
    WRITE ("ITER=",ITERATIF,"D=",D)
END
END
END.
```

12 Approximation globale d'un ensemble de fonctions au sens de Tchebycheff sur un intervalle.

Nous donnons comme exemple l'approximation des fonctions $\frac{1}{2\pi\sigma} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}$ pour σ dans [1.249, 1.251] par un polynome de degré 4 sur l'intervalle [0,2.5].
La précision du calcul peut être augmentée en changeant la valeur de M (ici égale à 10) dans la procédure GLOBALMAX.

```
   BEGIN
REAL PROCEDURE FA(REAL VALUE R,T) ;
EXP((-T-1)/(2*R-R))*(1/R*SQRT(2*PI)) ;

 REAL PROCEDURE F(INTEGER VALUE I ; REAL VALUE T) ;
CASE I OF (1,T,T*T,T**3,T**4) ;
REAL ALPHA,BETA,A,B ;
ALPHA:=1.249 ; BETA:=1.251 ; A:=0 ; B:=2.5 ;
BEGIN
```

↑

procédure ECHANGEDSRN avec pour procédure CONSTRUCTIONS :

```
PROCEDURE CONSTRUCTIONS ;
      COMMENT CONSTRUCTION DE VALEURS DE DEPART ;
BEGIN
MAX:=(B-A)/(N-1) ;
FOR I:=1 UNTIL N-1 DO
FOR J:=1 UNTIL N DO
U(I,J):=F(I,A+(J-1)*MAX) ;
FOR I:=1 UNTIL N-1 DO
U(0,I):=-F(I,A+(N-1)*MAX) ;
GREGSOLSYSLINE(U,U(0,*),RO,N-1,BOOL) ;
IF BOOL=FALSE THEN WRITE(
"ENNUI AU DEPART") ;
RO(N):=1 ;
FOR J:=1 UNTIL N DO
U(0,J):=FA(ALPHA,A+(J-1)*MAX) ;
FOR J:=1 UNTIL N-1 DO
IF SGN(RL(J))=-1 THEN
BEGIN FOR I:=0 UNTIL N-1 DO
   U(I,J):=-U(I,J) ;
   RO(J):=-RO(J)
END ; MAX:=0 ;
FOR J:=1 UNTIL N DO
MAX:=MAX+RL(J) ;
FOR J:=1 UNTIL N DO
BEGIN U(N,J):=1 ;
   RL(J):=RO(J)/MAX
 END ;
END CONSTRUCTIONS ;
```

↓

```
INTEGER N ; N:=5 ;
BEGIN
   PROCEDURE GLOBALMAX ( REAL ARRAY X,F(*) ; REAL RESULT IE ) ;
```

```
      BEGIN REAL PROCEDURE MAX(REAL PROCEDURE EE ;
      REAL VALUE A,B ; REAL RESULT XC) ;
      COMMENT CALCULE DANS MAX LE MAXIMUM DE
      ABS ER(T) POUR T PARCOURANT L'INTERVALLE A,B. LE MAXIMUM EST
      ATTEINT POUR T=XC ;
      BEGIN
      REAL S,RES,HO,H,V1,V2,V3,TC,T ;
      LOGICAL BOO ; INTEGER SGN ;
      S:=ABS EE(A) ; RES:=A ; T:=A ;
      HO:=H:=(B-A)/100 ; REP: BOO:=FALSE ;
      DEP: V1:=EE(T) ; V2:=EE(T+H) ;
      V3:=EE(T+2*H) ;
      ITER: IF (V3-V2)*(V2-V1) < 0 THEN GOTO DOV ;
      IF T+2.5*H > B THEN GOTO TEST ;
      T:=T+H ; V1:=V2 ; V2:=V3 ; V3:=EE(T+2*H) ; GOTO ITER ;
      TEST: IF ABS EE(B) > S THEN
      BEGIN S:=ABS EE(B) ; RES:=B END ;
      GOTO SORT ;
      DOV: H:=H/2 ;
      IF ¬ BOO THEN TC:=T+H ;
      BOO:=TRUE ;
      IF H/HO > 1-6 THEN GOTO DEP ;
      IF ABS V2 > S THEN
      BEGIN S:=ABS V2 ; RES:=T+H END ;
      T:=TC ; H:=HO ; GOTO REP ;
      SORT: XC:=RES ;
      S
      END MAXI ; INTEGER SGN ,M,K,KB;
M:=10 ;
BEGIN
REAL TB,V,F,S,U ; TB:=A ; H:=(BETA-ALPHA)/(N-1) ;
   KB:=1 ; S:=0 ;
FOR K:=1 UNTIL M DO
      BEGIN REAL PROCEDURE EE(REAL VALUE T) ;
BEGIN REAL S1 ; S1:=FA(ALPHA+(K-1)*H,T) ;
         FOR I:=1 UNTIL N DO
         S1:=S1-F(I,T)*X(I) ; S1
      END ;
      V:=MAX(EE,A,B,U) ;
      IF S < V THEN
      BEGIN S:=V ; KB:=K ; TB:=U ;
      IF EE(TB) > 0 THEN SGN:=1 ELSE
      SGN:=-1
END
   END ;
   E(0):=SGN*FA(ALPHA+(KB-1)*H,TB) ;
   FOR I:=1 UNTIL N DO
   E(I):=SGN*F(I,TB) ; E(N+1):=1 ;
   TB:=S-X(N+1)
END
END GLOBALMAX ;
   REAL ARRAY X,Z(1::N+1) ;
LOGICAL ITERATIF ; REAL U ;
   FOR I:=1 UNTIL N DO Z(I):=0 ; Z(N+1):=1 ;
ECHANGEDSUM(N+1,Z,GLOBALMAX,'-5,'-5,100,10,4,X,0,ITERATIF) ;
FOR I:=1 UNTIL N DO
WRITE(X(I),"=X(",I-1);
   WRITE("ITERATIF=",ITERATIF,"U=",U)
END
END
END.
```

Le programme a donné pour solution en 10 échanges le polynôme :

$2.002499 + 0.06550407\ t - 0.8805305\ t^2 + 0.2906543\ t^3 - 0.02378936\ t^4$

la "distance" entre l'ensemble des fonctions a approcher et ce polynôme étant de 0.004409492.

13 Approximation dans L_1

Nous donnons comme exemple l'approximation de t^3 par un polynôme de degré 1 au sens de la norme :

$$\|h\| = \int_0^1 |h(t)|dt$$

On obtient après 24 échanges :

$$P(t) = 0.06259626 - 0.6289786\ t$$

l'erreur étant 0.01561318.

```
BEGIN
REAL PROCEDURE F(INTEGER VALUE I ; REAL VALUE T) ;
CASE I+1 OF(
T**3,
1,
T,
T*T
) ;
REAL PROCEDURE PF(INTEGER VALUE I ; REAL VALUE T) ;
CASE I+1 OF(
(T**4)/4,
T,
(T**2)/2,
(T**3)/3
) ;
REAL A,B ;
INTEGER M ;
A:=0 ; B:=1 ;
M:=100 ;
BEGIN
```

↑

mettre ici la procédure ECHTRANSDSRN avec la procédure CONSTRUCTIONS ci-dessous

```
                    ;
        COMMENT CONSTRUCTION DE VALEURS DE DEPART ;
BEGIN
MAX:=(B-A)/(N+1) ;
FOR I:=1 UNTIL N-1 DO
FOR J:=1 UNTIL N DO
U(I,J):=PF(I,A+(J-1)*MAX)-PF(I,A)-PF(I,B) ;
FOR I:=1 UNTIL N-1 DO
SD(I):=-PF(I,A) ;
MESSAGESYSTEM(U,SD(1),RU,N-1,BOOL) ;
IF BOOL=FALSE THEN WRITE(
'MEMOIRE AU DEPART') ;
SD(0):=0 ;
FOR J:=1 UNTIL N DO
J(0,J):= 2*PF(0,A+(J-1)*MAX)-PF(0,A)-PF(0,B) ;
FOR J:=1 UNTIL N-1 DO
IF SD(ABS(J))=-1 THEN
BEGIN FOR I:=1 UNTIL N-1 DO
    J(I,J):=-U(I,J) ;
    SD(J):=-SD(J)
  END ; MAX:=0 ;
FOR J:=1 UNTIL N DO
MAX:=MAX+SD(J) ;
FOR J:=1 UNTIL N DO
BEGIN J(0,J):=1 ;
    SD(J):=SD(J)/MAX
  END ;
                    ;
```

```
INTEGER N ; N:=3 ;
BEGIN
   PROCEDURE NORMEL1(REAL ARRAY X,E(*) ; REAL RESULT IB) ;
   COMMENT LA PROCEDURE CALCULE LE VECTEUR E(0,...,N) ET LE
   SCALAIRE IB POUR L'APPROXIMATION DANS L1(A,B) AVEC LA
   NORME DE H= INTEGRALE DE A A B DE ABS(H(T)) DT. LES SCALAIRES
   A ET B, LES PROCEDURES F(I,T) POUR I=0,...,N ET FM(I,T)
   CONSTANT UNE PRIMITIVE DE F POUR I=1,...,N SONT DEFINIS
   DANS LE CORPS DE LA PROCEDURE ;
   BEGIN
      REAL PROCEDURE SX(REAL VALUE T) ;
      BEGIN REAL S ; S:=F(0,T) ;
         FOR I:=1 UNTIL N DO
           S:=S-X(I)*F(I,T) ;
         SX:=S
      END SX ;
      REAL PROCEDURE SFM(REAL VALUE T) ;
      BEGIN REAL S ; S:=FM(0,T) ;
         FOR I:=1 UNTIL N DO
           S:=S-X(I)*FM(I,T) ;
         SFM:=S
      END SFM ;
      INTEGER PROCEDURE SGN(REAL VALUE X) ;
      IF X >= 0 THEN 1 ELSE -1 ;
                    ;
```

```
REAL HP,H,T ;H :=(B-A)/M;HP:=H/2 ;
IB:=-X(N+1) ;FOR J:=0 UNTIL N DO
E(J):=0 ;
T:=A-H ;
FOR I:=0 UNTIL M-1 DO
BEGIN T:=T+H ;
   SG:=SGN(PER(T+HP)) ;
   FOR J:=0 UNTIL N DO
   E(J):=E(J)+SG*(PF(J,T+H)-PF(J,T)) ;
    IB:=IB+SG*(PER(T+H)-PER(T))
END ; E(N+1):=1
END
   END NORMEL 1 ;
REAL ARRAY X,Z(1::N+1) ;
LOGICAL ITERATIF ; REAL D ;
   FOR I:=1 UNTIL N DO Z(I):=0 ; Z(N+1):=1 ;
ECHANGEDSRN(N+1,Z,NORMEL1,'-5,'-5,100,0,4,X,D,ITERATIF) ;
   WRITE("TEST DE APPROX. AU SENS DU MAX SUR -1,+1 DE X**2 PAR UN POLYNO
ME DE DEGRE 1",X(1),"+",X(2),"*T") ;
   WRITE("ITERATIF=",ITERATIF,"D=",D)
END
END
END.
```